

FOKKER - PLANCK - BESCHREIBUNG

SCHWACH STÖßBEHAFTETER

INHOMOGENER PLASMEN

Disbui. München

1988

Andreas Blobel

**Fokker-Planck-Beschreibung
schwach stoßbehafteter
inhomogener Plasmen**

DISSERTATION DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK
DER LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

vorgelegt von Andreas Blobel

München, den 5. Mai 1988

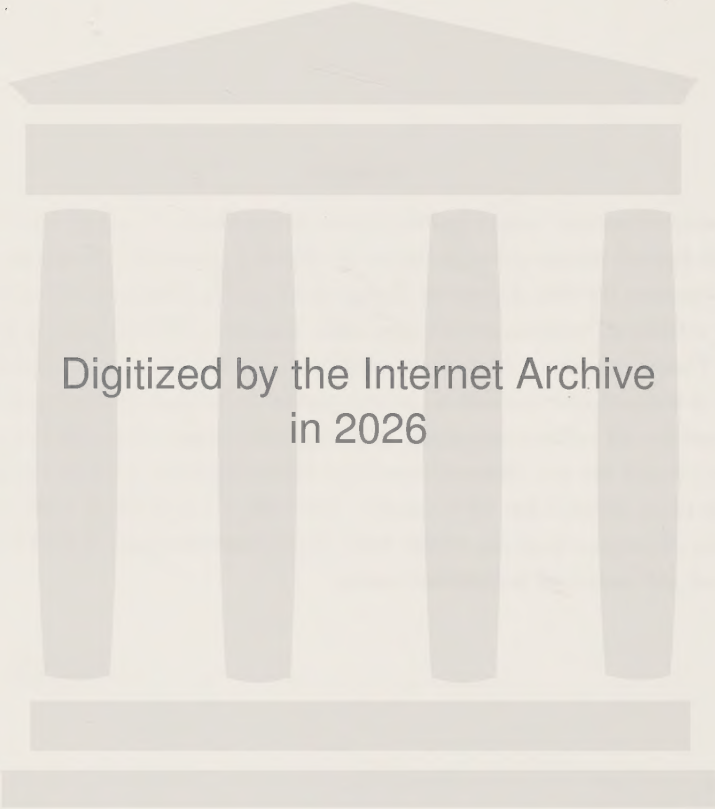
1. Gutachter:.....

2. Gutachter:.....

Tag der mündlichen Prüfung:.....

Abstract

Steep temperature and density gradients occur in the plasma boundary layer driving outward directed energy and mass fluxes. Results of a numerical code are presented, which simulates the time dependent motion of two species (electrons and ions) in an weakly collisional, inhomogeneous region along magnetic field lines according to the Fokker-Planck equation . New is the combination of the following properties: Ion motion is included and modelled as moving variable temperature Maxwellians. Under this condition all collision operators, including selfcollisions, are evaluated *exactly*. The code is very fast and allows for simulation of time scenarios up to several hundred collision times within a few CPU-minutes. Moreover it is possible to study electron run-away phenomena in strong electric fields. Deviations from classical local fluxes are examined and compared to literature results.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554816_0015

*"... und über diesem Geschäft
habe ich nicht Muße gehabt,
weder in den Angelegenheiten der Stadt
etwas der Rede Wertes zu leisten,
noch auch in meinen häuslichen;
sondern in tausendfältiger Armut lebe ich
wegen dieses dem Gotte geleisteten Dienstes."*

Sokrates, Apologie, 23b.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung und Übersicht	1
2. das Modell	9
2.1. die Modellgleichungen	9
2.2. Vergleich mit anderen kinetischen Modellen	13
3. Numerik und Programmaufbau	17
3.1. Diskretisierung in Ort und Zeit	17
3.2. Randbedingungen und Quellen	19
3.3. Umsetzung durch den Code	20
3.4. Bemerkungen zur Rechenzeit	24
4. Tests und Anwendungen	26
4.1. allgemeine Resultate und Invarianz gegenüber der Skala $v_{th}(x)$	26
4.2. Selbststösse und Energieerhaltung	28
4.3. Vergleich mit Spitzer-Wärmeleitung	29
4.3.1. ortsunabhängige klassische Wärmeleitung (Quellen)	29
4.3.2. ortsunabhängige wahre Wärmeleitung (keine Quellen)	31
4.4. Vergleich mit Spitzer-Teilchenfluss und run-away	33
4.5. selbststossfreie Rechnungen	34
4.6. warme bewegliche Ionen	35
4.6.1. die Asymmetrie des Modells bei Massenverhältnis 1:1	35
4.6.2. druckgetriebene konvektionsdominierte Ströme	36
4.6.3. Temperatenausgleich zwischen Elektronen und Ionen	37

4.7. Studium der Verteilungsfunktion	37
5. Zusammenfassung und Ausblick	40
6. Appendix A : Begriffsbildungen	42
6.1. Konventionen	42
6.2. Definitionen	42
6.3. Burnett-Funktionen	44
6.4. Elektronen-Verteilungsfunktion	45
6.5. Ionen-Verteilungsfunktion	45
6.6. abgeleitete physikalische Grössen	46
6.7. Energieerhaltungssatz	49
6.8. Wärme- und Teilchenstrom im Lorentzgas	50
7. Appendix B : Lösung der Modellgleichungen	52
7.1. die substantielle Ableitung	52
7.2. die Ionengleichungen	54
7.3. Stösse mit maxwellischen Ionen	59
7.4. Selbstwechselwirkung der Elektronen	62

1. Einleitung und Übersicht

Ein Weg zur Kernfusion ist der magnetische Einschluß von Plasma in toroidalen Konfigurationen, z.B. Tokamaks. Dabei wird angenommen, daß die magnetischen Feldlinien geschlossene, toroidale Flußflächen bilden, auf denen sie helikal umlaufen¹. Die benötigte thermische Isolierung des Plasmainneren kommt zustande durch die geringe Beweglichkeit der Ladungsträger quer zu den Flußflächen (Senkrechttransport). Entlang Feldlinien sind die Ladungsträger gut beweglich (Paralleltransport), so daß wesentliche Plasmaparameter, z.B. Temperatur und Druck, auf den Flußflächen konstant sind.

Entscheidende Bedeutung gewinnt der Paralleltransport in solchen Zonen des Plasmas, welche durch die Feldlinien in Verbindung mit dem Wandmaterial des Entladungsgefäßes stehen. Im sogenannten Divertortokamak¹ beispielsweise werden die Feldlinien durch zusätzliche Leiter außerhalb einer bestimmten Flußfläche in eine separate Kammer gelenkt, wo sie auf Prallplatten an der Gefäßwand stoßen. Abgesehen von den Verlusten durch Strahlung und Ladungsaustausch, gelangt die gesamte im Plasma deponierte Energie auf diesem Weg entlang der Feldlinien auf die Prallplatten. In der Randschicht treten somit starke *parallele* Strömungen auf, die von entsprechend steilen Temperatur- und Druckgradienten angetrieben werden. Kenntnis und Vorausberechenbarkeit der Plasmaparameter in dieser Region sind von größter Wichtigkeit, da sie die Verunreinigungsproduktion bestimmen.

Wie sich jedoch herausstellt, sind konventionelle lokale Theorien des Energietransports (z.B. Flüssigkeitsmodelle) in diesem Regime nicht anwendbar. Sie gelten nur, falls die freien Weglängen klein sind gemessen an den Dimensionen des betrachteten Systems bzw. den Abfalllängen der Temperatur. In heutigen Fusionsexperimenten werden hingegen so hohe Temperaturen erreicht, daß diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Deshalb scheiden lokale Modelle aus, und man muß *kinetische Theorie* treiben, d.h. auf die mikroskopische Ebene zurückgehen und die Bewegung einzelner Teilchen ins Auge fassen.

Dazu leistet die vorliegende Arbeit einen Beitrag. Ihr Thema ist die numerische Untersuchung von Energie-, Massen- und elektrischen Strömen in der Randschicht in Abhängigkeit von den dort auftretenden Temperatur- und Druckprofilen sowie elektrischen Feldern. Sie befaßt sich ausschließlich mit dem Paralleltransport. Ihre Ergebnisse gelten aber auch unter den Bedingungen der *Laserfusion*, wo allein die Trägheit des Pellet-Materials das Plasma während der kurzen Phase der Einwirkung des La-

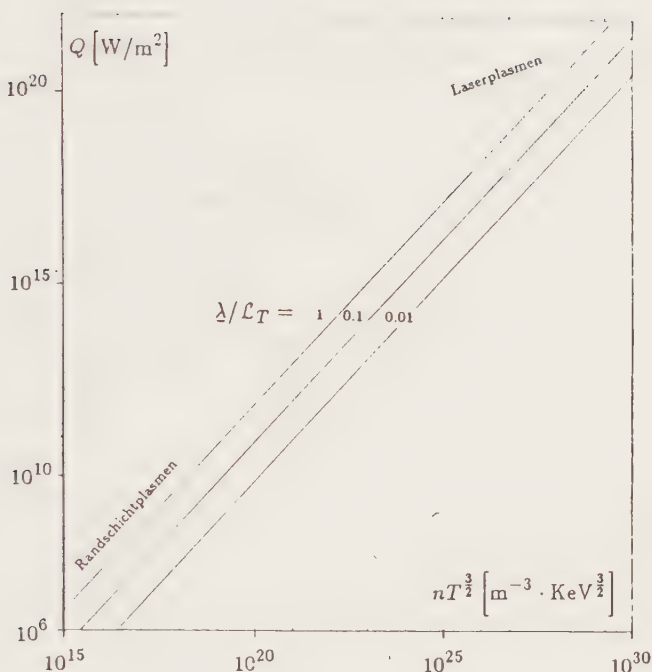
sers zusammenhält (Trägheitseinschluß). Primärer Zweck der Energiedeposition durch das Laserlicht ist die Kompression des Plasmas durch den Rückstoß des umgebenden, im Zuge der Aufheizung expandierenden Materials. Die Dynamik dieser Kompression hängt eng mit der Ausbreitung der Wärmefront zusammen.

Im Hinblick auf typische Plasmaparameter liegen Laser- und Randschichtplasmen um etliche Größenordnungen auseinander. So bewegen sich die Energieflüsse in der Randschicht eines projektierten Tokamakfusionsreaktors im Bereich einiger 10^9 W/m^2 , während sie in der Laserabsorptionszone eines Fusionspellets bis zu 10^{21} W/m^2 erreichen sollten. In Begriffen geeigneter *dimensionsloser* Größen stellt sich jedoch die weitgehende Äquivalenz beider Situationen heraus. Deshalb lassen sie sich in unserer Arbeit unter einen Hut bringen.

Von zentraler Bedeutung sind hierbei 2 charakteristische Längen, nämlich die freie Weglänge λ , also die zwischen 2 aufeinanderfolgenden Stößen im Mittel zurückgelegte Strecke, und die Abfalllänge der Temperatur $\mathcal{L}_T = T_e/T_e'$, deren dimensionsloses Verhältnis $\mathcal{L}_T/\lambda$ für den physikalischen Ablauf maßgebend ist. Insbesondere liefert es eine Abschätzung der dimensionslosen Zahl $Q/nT^{\frac{3}{2}}$ ($Q = \text{Wärmestrom}$, $n = \text{Dichte}$, $T = \text{Temperatur}$)², die übrigens bis auf einen Faktor mit Q/Q_{FS} übereinstimmt (Erklärung von Q_{FS} später). In Laserplasmen findet die Energiedeposition in einem eng umgrenzten Gebiet statt, weshalb $\mathcal{L}_T$ im Vergleich mit der Randschicht klein ist. Im selben Verhältnis zueinander stehen jedoch auch die freien Weglängen aufgrund der großen Dichte des Laserplasmas, so daß $\mathcal{L}_T/\lambda$ in beiden Fällen von gleicher Größenordnung ist. Eine Illustration dazu gibt das Bild auf Seite 3.

Im Folgenden soll die Bedeutung von $\mathcal{L}_T/\lambda$ klarer zum Vorschein kommen. Man kann 2 Extreme unterscheiden:

- $\mathcal{L}_T \gg \lambda$, d.h. die Temperatur ändert sich nur geringfügig beim Zurücklegen einer freien Weglänge. Dies ist der *stark stoßbehaftete* Grenzfall. Dann ist eine *lokale* Beschreibung adequat, worin die Flüsse als *algebraische* Funktionen lokaler Größen angesehen werden können und gut von den klassischen Spitzer³-Rechnungen reproduziert werden. Andernfalls genügen sie komplizierteren *Integralgleichungen*, welche der Nichtlokalität Rechnung tragen.
- $\lambda \gg \mathcal{L}_T$. Ein solches System ist nahezu *stoßfrei* auf der $\mathcal{L}_T$ -Skala. Man stelle sich 2 Maxwell-Verteilungen vor, deren Temperaturen sich zueinander verhalten wie 2:1. Ihr Abstand betrage nur einen kleinen Bruchteil von λ . Der halbe nach rechts laufende Anteil der *heissen* Verteilung und die nach links laufende



Verhältnis von freier Weglänge λ zu Temperaturabfalllänge $\mathcal{L}_T$ für Plasmen in der Randschicht von Tokamaks und lasergeheizte Plasmen. Die zugrunde gelegten Daten für Energieflüsse, Plasmadichten und Temperaturen umfassen in beiden Fällen sowohl bereits existierende Experimente als auch Parameter projektierter Fusionsreaktoren.

Hälfte der kalten Verteilung durchdringen sich praktisch stoßfrei, und es bleibt ein Netto-Wärme fluß nach rechts, ohne daß ein Netto-Teilchenstrom fließt. Er wird auch 'free streaming limit' genannt und mit Q_{FS} abgekürzt. In diesem Regime liefert also Q_{FS} eine gute Beschreibung des Wärmestroms Q , wohingegen jetzt der klassische Spitzer-Wert Q_{SH} sehr daneben liegt. Genauer gesagt ist er viel zu gross. Diese Diskrepanz heisst auch *Flu ßhemmung* (flux inhibition). Der Quotient Q_{SH}/Q_{FS} ist geradezu ein Maß dafür, wie 'klassisch' sich das System verhält: Ist er groß, wird die Spitzer-Theorie ungültig.

Typische Randschicht-Temperaturen und -Dichten im Asdex-Tokamak sind ~ 0.1 KeV

und $\sim 10^{14} \text{cm}^{-3}$. Die zugehörigen freien Weglängen liegen im Bereich von Metern, $\lambda \sim 1 \text{m}$, was auch die Grössenordnung der Temperaturabfalllänge ist. Mit anderen Worten:

$$\mathcal{L}_T \sim \lambda \quad .$$

Diese Relation kennzeichnet den Übergangsbereich zwischen stark - und schwach stoßbehaftetem Regime. Er ist für das Experiment also von ausschlaggebender Bedeutung. Dort erwartet man ein Verhalten, das irgendwo zwischen den oben genannten Grenzfällen liegt. Es lässt sich aber anhand einfacher Überlegungen nicht mehr quantitativ reproduzieren. Stattdessen müssen die kinetischen Gleichungen möglichst allgemein gelöst werden. Das ist in unserer Arbeit geschehen in folgendem Rahmen:

Gegeben seien ein (1-dimensionaler) Weg in der Randschicht entlang Feldlinien und 2 Spezies, Elektronen und Ionen. Das Modell liefert eine zeitabhängige, kinetische Beschreibung mit Hilfe der *Fokker-Planck-Gleichung*⁴. Wir haben es demnach mit 4 unabhängigen Variablen zu tun: der Ort x , die Zeit t und im Geschwindigkeitsraum in Kugelkoordinaten der Absolutbetrag v der Geschwindigkeit und deren Winkel θ gegen die x -Achse. Der Azimuthwinkel φ entfällt wegen Axialsymmetrie. Gesucht sind die Phasenraumdichten von Elektronen und Ionen als Funktion dieser 4 Variablen.

Ein wesentlicher Bestandteil des Lösungsverfahrens ist die Entwicklung der Elektronen-Verteilungsfunktion nach sogenannten *Burnettfunktionen*⁵ (A 6.3.) im Geschwindigkeitsraum. Die Burnettfunktionen sind Produkte aus *Legendrepolynomen* in θ und *Laguerrepolynomen* in v und bilden ein *orthogonales* Funktionensystem.

Die Ionen treten dagegen nur als verschobene Maxwellverteilungen in Erscheinung. Im Gegensatz zu den Elektronen können sie also in unserem Modell nur durch *Konvektion*, d.h. in Verbindung mit einem Massenstrom Energie transportieren. *Konduktive* Wärmeleitung beruht auf einer *anisotropen* Deformation der Verteilungsfunktion und bleibt deshalb ausgeschlossen. Diese Vereinfachung ist gerechtfertigt, weil die Ionen viel *schwerer* sind als die Elektronen und ihre Beiträge zur Wärmeleitung sich zueinander verhalten wie $\sqrt{m_e} : \sqrt{m_p}$ ⁶.

Unter dieser einschränkenden Bedingung an die Ionen wird die Fokker-Planck-Gleichung für beide Spezies *exakt* gelöst, d.h. die Stoßoperatoren werden (im Kontext der Rosenbluth-Theorie) in voller Allgemeinheit numerisch ausgewertet. Zum Zwecke einer kinetischen Beschreibung der *Ionen*, wie sie bei der Berechnung von Viskositätseffekten in passenden Parameterregionen von Nutzen sein könnte, lassen sich jedoch die Rollen beider Spezies leicht vertauschen.

Dichte, Temperatur und Schwerpunktsgeschwindigkeit der Maxwell-Verteilung sind demzufolge die 3 *einzig* Variablen auf der Ionenseite, während die Elektronen-Verteilungsfunktion durch eine abbrechende Reihe von Burnett-Entwicklungskoeffizienten hinreichend genau dargestellt werden kann. Mit 'hinreichend' ist gemeint, daß eine noch detailliertere Auflösung an den makroskopischen Ergebnissen, wie z.B. Energiefluß und -dichte, nichts mehr ändern würde.

Im Mittelpunkt unserer Untersuchung steht also nicht, wie in einigen vergleichbaren Studien, die Verteilungsfunktion an sich, sondern ihr Zusammenhang mit *makroskopischen* Größen, welche sich darum besonders schnell und effizient ermitteln lassen. Besonderes Gewicht hat dabei die Wärmeleitung der Elektronen. (4.3.). Daneben kommen aber auch elektrische Leitfähigkeit (4.4.) und *thermoelektrische* Effekte in Betracht. Z.B. kompensiert in den Studien zur Wärmeleitung ein elektrisches Gegenfeld stets die vom Temperaturgefälle hervorgerufene thermoelektrische Kraft, so daß kein elektrischer Strom fließt.

Als wichtiges Prinzip bei der Lösung der Modellgleichungen hat sich die Verwendung geeigneter *dimensionsloser* Variablen erwiesen. Die Gleichungen sind dadurch um viele lästige Vorfaktoren leichter und übersichtlicher geworden, was sicher auch zur Fehlerbeseitigung beigetragen hat. Dabei sind wir folgendermaßen verfahren:

Eine natürliche *Längenskala* im Plasma ist die mittlere freie Weglänge (z.B. der Elektronen) λ . Die Stoßzeit τ , welche die mittlere Zeit zwischen 2 aufeinanderfolgenden Stößen angibt, stellt eine natürliche *Zeitskala* dar. Daraus gewinnt man natürliche Einheiten für Geschwindigkeit $v_{th} = \frac{\lambda}{\tau}$ (thermische Geschwindigkeit), Dichte $\rho = \frac{m_e^2 v_{th}^3}{4\pi e^4 \tau}$ (Λ = Coulomblogarithmus) und elektrische Feldstärke $\epsilon = \frac{m_e}{e} \frac{v_{th}}{\tau}$ (vgl. Appendix 6.2.). Aus ρ und v_{th} lassen sich ferner natürliche Einheiten für Strom-, Energie- und Energiestromdichten bilden (vgl. Appendix 6.6.). Diese Maßstäbe werden zu einer festen Zeit $\underline{t}$ an einem festen Ort $\underline{x}$ im Plasma ermittelt und dann dem gesamten raum-zeitlichen Geschehen als Referenzgrößen unterlegt. Auf diese Weise werden alle physikalischen Größen *dimensionslos* und können in den Graphen als reine Zahlen gemeinsam aufgetragen werden (siehe Abbildungen).

Wir lenken jetzt unser Augenmerk auf die Behandlung der sogenannten *Quasineutralität*. Elektrische Felder in der Randschicht bilden einen das Plasma umgebenden Potentialwall (electrostatic sheath). Er sorgt dafür, daß die leichten, beweglichen Elektronen nicht schneller entweichen als die schweren Ionen. Dadurch bleibt das Plasma im Mittel elektrisch neutral. Fluktuationen der Ladungsdichte um den neutralen Mittelwert 0 herum spielen sich ab in Gebieten von der Ausdehnung der *Debyelänge* λ_D

und auf Zeitskalen τ_P , die von der *Plasmafrequenz* bestimmt sind. Beide Skalen sind *sehr klein* im Vergleich mit den zugrundeliegenden Einheiten für Orts- und Zeitmessung, nämlich Stoßzeit τ und freie Weglänge λ ; typische Werte in der Randschicht sind:

$$\lambda_D \sim 1 - 10 \mu\text{m}, \lambda \sim 1 \text{m}, \tau_P \sim 10^{-5} \mu\text{s}, \tau \sim 10^{-1} \mu\text{s}.$$

Man kann also ohne weiteres direkt *Neutralität* fordern:

$$\rho_e(t, x) = \rho_p(t, x),$$

was über die Fokker-Planck-Gleichung auf eine Bestimmungsgleichung für das *elektrische Feld* hinausläuft (vgl. 2.1.).

Üblicherweise wird folgender Weg eingeschlagen: Aus lokalen Abweichungen von der Neutralität errechnet man mit Hilfe der Poisson-Gleichung ein rücktreibendes elektrisches Feld, welches die Ladungsüberschüsse auszugleichen sucht. Abgesehen davon, daß bei diesem Verfahren die Poisson-Gleichung gelöst werden muß, was viel aufwendiger ist als die Einbeziehung der Neutralitätsbedingung, bleibt man an die sehr kurze Zeitskala der Plasmafrequenz gebunden, und es wird schwierig, die Zeit-Integration bis zum stationären Gleichgewicht durchzuziehen, wenn man die Plasmaperiode nicht mit einem Kunstgriff⁷ um einige Größenordnungen streckt.

Die in dieser Arbeit studierten Anwendungen des so bestimmten physikalisch-mathematischen Modells zerfallen grob in 3 Bereiche:

- Die Ionen seien unendlich massiv und ortsfest (Lorentzgas). Diesen Rechnungen gemeinsam ist folgende Ausgangssituation: Es wird die Existenz zweier 'Wärmebäder' angenommen, worin die Elektronen-Temperatur mit Hilfe von Energiequellen bzw. -senken nach dem Thermostatprinzip konstant gehalten wird. Sie sind durch eine *quellenfreie* Strecke miteinander verbunden. Befinden sich die Bäder auf unterschiedlichen Temperaturen, induziert der Temperaturabfall einen *Energiestrom*, der im heißen Bad entspringt, über die freie Strecke ins kalte Bad fließt und dort in Energiesenken 'versickert'. Mittels geeigneter elektrischer Felder wird sichergestellt, daß eine kompensierende Rückströmung 'kalter' Elektronen den *elektrischen* Strom auf Null abgleicht. Es handelt sich also um *konduktiven* Wärmetransport. Man kann jetzt untersuchen, wie der Wärmestrom abhängt

- vom Abstand der Bäder gemessen in freien Weglängen
- dem Verhältnis ihrer Temperaturen

und Vergleiche ziehen mit anderen numerischen Arbeiten und mit den klassischen semi-analytischen Resultaten von Spitzer. Dies ist in 4.3. geschehen.

- Wir gehen wieder vom Lorentzgas aus. Diesmal sei das Plasma *homogen*. Darin wirke ein homogenes elektrisches Feld (Man denke etwa an eine elektrische Ringspannung in einem ringförmigen Plasma). Es setzt Teilchen- und Wärmeströme in Gang, deren parametrische Abhängigkeit von der Feldstärke für verschiedene Modelle der Elektron-Elektron-Wechselwirkung studiert wird. Das ganze System steht in Kontakt mit einem Wärmebad, welches die vom E -Feld geleistete Arbeit laufend 'verschluckt', so daß die Temperatur konstant bleibt. Nur unter diesen Umständen kann sich ein stationäres Gleichgewicht einstellen. Wichtige Punkte sind der Vergleich mit Spitzer^{3,8} im Grenzfall *kleiner* Felder und der sogenannte *run-away*-Effekt, wenn das elektrische Feld in der Gegend des *kritischen Feldes*^{9,10} liegt. In diesem Bereich halten sich die beschleunigende Wirkung des Feldes und die abbremende Wirkung der Stöße nicht mehr die Waage. Der Stoßquerschnitt der Elektronen nimmt ab mit der 4. Potenz der Relativgeschwindigkeit; je schneller sich also ein supra-thermisches Elektron im elektrischen Feld bewegt, desto weniger wird es durch Stöße mit den bulk-Elektronen zurückgehalten, und desto schneller wird es wiederum. Der selbstverstärkende Regelkreis schließt sich, und man bekommt ein lawinenartiges Anwachsen des vom elektrischen Feld getriebenen Wärmestroms.
- Der 3. Anwendungsbereich hat vorwiegend Testcharakter. Oben wurde hervorgehoben, daß die Ionen in unserem Modell bloß als bewegliche Maxwell-Verteilungen in Erscheinung treten. Diese Annahme ist gerechtfertigt, weil die Ionen wegen ihrer großen Masse nur einen kleinen Bruchteil des totalen Wärmestroms tragen. Setzt man hingegen die Massen von Elektronen und Ionen gleich, sind sie bis auf das Ladungsvorzeichen *physikalisch* identisch. Auf die Ergebnisse wird dann die vom Modell herrührende ungleiche Behandlung beider Spezies durchschlagen. So werden die charakteristischen Züge des Modells sichtbar gemacht, insbesondere die Tatsache, daß die Ionen keine konduktive Wärmeleitung besitzen. Man kann auch untersuchen, wie das System auf ein geringfügiges *Druckgefälle* reagiert. Weil die Ionen jetzt leicht sind, fließen beträchtliche Massenströme in Richtung des Druckabfalls. Konduktion fällt dann gegenüber dem *konvektiven* Wärmetransport kaum mehr ins Gewicht und beide Spezies sollten das gleiche Verhalten zeigen. Hierzu präsentierte Rechnungen

bestätigen diese Vermutung.

Wir geben noch eine kurze Kapitelübersicht:

Eine Liste der verwendeten Symbole und Begriffe findet man im Appendix (6.2.). In 2.1. werden die Ausgangsgleichungen vorgestellt. Man muß sie noch weiter verarbeiten, bis sie sich als Eingabe für den Code eignen. Insbesondere werden sie dimensionslos gemacht und auf die Koeffizienten der Burnett-Entwicklungsfunktionen umgeschrieben. Dieser Aufbereitungsprozeß ist in Appendix B dokumentiert. In 3.1. wird das numerische Verfahren besprochen und anschließend der Programmaufbau skizziert. Der wichtigen Frage der Rechenzeit ist ein eigener Paragraph gewidmet (3.4.).

2. das Modell

2.1. DIE MODELLGLEICHUNGEN

Die Fokker-Planck-Gleichung ($\mathcal{F} - \mathcal{P}$) lautet in impliziter Form für 2 Spezies e, p ('Elektronen', 'Protonen')

$$\left(\frac{d\mathbf{f}_\alpha}{d\mathbf{t}} \right)_s = \left(\frac{d\mathbf{f}_\alpha}{d\mathbf{t}} \right)_c^{e/e} + \left(\frac{d\mathbf{f}_\alpha}{d\mathbf{t}} \right)_c^{e/p}, \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{f}_\alpha}{d\mathbf{t}} \right)_s = \left(\frac{d\mathbf{f}_\alpha}{d\mathbf{t}} \right)_c^{p/p} + \left(\frac{d\mathbf{f}_\alpha}{d\mathbf{t}} \right)_c^{p/e}. \quad (2.2)$$

Links stehen die sogenannten *substantiellen* Ableitungen, rechts die *Stossableitungen*. Gl. (1, 2) sind über die Stossterme gekoppelt. Die Paare α/β besagen 'Stoß der α -Sorte (*Testteilchen*) an der β -Sorte (*Feldteilchen*). Da voraussetzungsgemäß nur eine Raumdimension x im Spiel ist, beträgt die substantielle Ableitung :

$$\left(\frac{d\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{d\mathbf{t}} \right)_s = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_\alpha}{\partial \mathbf{t}} + \mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{f}_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e_\alpha \mathbf{E}}{m_\alpha} \frac{\partial \mathbf{f}_\alpha}{\partial \mathbf{v}_x} \right), \quad \alpha = e, p. \quad (2.3)$$

Um einen anschaulichen Begriff von $\mathcal{F} - \mathcal{P}$ zu gewinnen, setze man sich auf die Trajektorie eines α -Partikels im kleinen Phasenraum. Dann gibt die substantielle Ableitung die zeitliche Änderung der Phasenraumdichte $\mathbf{f}_\alpha$ in der mitbewegten Umgebung des Teilchens wieder. Falls keine Kollisionen stattfinden, die rechte Seite von $\mathcal{F} - \mathcal{P}$ also verschwindet, bleibt die Phasenraumdichte entlang der Trajektorien invariant (Liouville-Satz). Man hat es dann mit der *Vlasov*-Gleichung zu tun. Andererseits sorgen Stöße zwischen den Teilchen dafür, daß sich die Phasenraumdichte am Ort eines bestimmten Teilchens ändern kann. Wie das geschieht, wird von der *Stossableitung* bestimmt. In der Rosenbluth-Darstellung¹¹ hat sie die Gestalt⁴

$$\left(\frac{d\mathbf{f}_\alpha}{d\mathbf{t}} \right)_c^{\alpha/\beta} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} \left(\mathbf{f}_\alpha(\vec{\mathbf{v}}) \langle \Delta \mathbf{v}_i \rangle^{\alpha/\beta} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}_i \partial \mathbf{v}_j} \left(\mathbf{f}_\alpha(\vec{\mathbf{v}}) \langle \Delta \mathbf{v}_i \Delta \mathbf{v}_j \rangle^{\alpha/\beta} \right), \quad (2.4)$$

wobei

$$\langle \Delta \mathbf{v}_i \rangle^{\alpha/\beta} = (1 + m_r) \frac{\mathcal{L}^{\alpha/\beta}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} \Phi_\beta(\vec{\mathbf{v}}) \quad ; \quad \Phi_\beta(\vec{\mathbf{v}}) = \int d\vec{\mathbf{v}}' \frac{\mathbf{f}_\beta(\vec{\mathbf{v}}')}{|\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}}'|} \quad (2.5)$$

und

$$\langle \Delta \underline{v}_i \Delta \underline{v}_j \rangle^{\alpha/\beta} = \frac{\mathcal{L}^{\alpha/\beta}}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial \underline{v}_i \partial \underline{v}_j} \Psi_\beta(\underline{v}) \quad ; \quad \Psi_\beta(\underline{v}) = \int d\underline{v}' \underline{f}_\beta(\underline{v}') |\underline{v} - \underline{v}'| \quad , \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}^{\alpha/\beta} \equiv \Lambda \left(\frac{4\pi e_\alpha e_\beta}{m_\alpha} \right)^2 \quad , \quad \alpha, \beta = e, p \quad .$$

Λ ist der Coulomblogarithmus⁴. Die Stoßableitung setzt sich demnach zusammen aus einem *Reibungs*- (Gl. (5)) und einem *Diffusions*anteil (Gl. (6)). Ersterer wirkt auf die Lage des Schwerpunkts der Testteilchen-Verteilung, indem er diesen mit dem Schwerpunkt des Stoßpartners zur Deckung zu bringen sucht, während Letzterer für Verbreiterung bzw. Konzentrierung der Verteilung um ihren Schwerpunkt verantwortlich ist.

Die Partikel der α -Spezies bezeichnet man als *Testteilchen*, die der β -Spezies als *Feldteilchen*.

Φ_β und Ψ_β heissen *Rosenbluthpotentiale*¹¹. Üblicherweise wird bei ihrer Berechnung zwecks Vereinfachung nicht die volle Feld-Verteilungsfunktion $\underline{f}_\beta$ eingesetzt, sondern z.B. lediglich der maxwellsche oder isotrope Anteil. In unserer Arbeit wurden sie zur Ermittlung der Selbststöße der Elektronen im Rahmen der Abschneidenäherung (siehe unten) *exakt* ausgewertet. Näheres hierzu im folgenden Paragraphen.

Wie bereits in der Einleitung ausgeführt wurde, sind die Ionen in unserem Modell durch VERSCHOBENE MAXWELLVERTEILUNGEN repräsentiert. Dieselbe Annahme taucht z.B. auch in [Tanenbaum]¹² als einfachste Momentennäherung auf.

Deshalb ist ihre Verteilungsfunktion $\underline{f}_p$ durch 3 Variable festgelegt, nämlich

Dichte ρ , thermische Geschwindigkeit w_{th} und Schwerpunktschwindigkeit w :*

$$\underline{f}_p(t, x, \underline{v}) = \mathcal{N}_p(t, x) f_p(t, x, \underline{v}) = \mathcal{N}_p(t, x) \rho(t, x) e^{-\left(\frac{\underline{v} - \underline{w}(t, x)}{w_{th}(t, x)} \right)^2} \quad . \quad (2.7)$$

Energie- und Impulserhaltung bei Elektronen-Ionen-Stößen haben zur Folge⁶:

$$0 = \int d\underline{v} \left(\frac{d\underline{f}_e}{d\underline{t}} \right)_s \left\{ \frac{1}{2} m_e \underline{v}^2 \right\} + \int d\underline{v} \left(\frac{d\underline{f}_p}{d\underline{t}} \right)_s \left\{ \frac{1}{2} m_p \underline{v}^2 \right\} \quad (2.8)$$

bzw.

$$0 = \int d\underline{v} \left(\frac{d\underline{f}_e}{d\underline{t}} \right)_s m_e \underline{v} + \int d\underline{v} \left(\frac{d\underline{f}_p}{d\underline{t}} \right)_s m_p \underline{v} \quad , \quad \alpha, \beta = e, p \quad . \quad (2.9)$$

*vgl. Appendix 6.5.

Der oben gegebenen anschaulichen Deutung der substantiellen Ableitung folgend, lassen sich Gl. (8, 9) sofort verstehen: Durch Kollisionen wird die Phasenraum-Umgebung eines Elektrons be- oder entvölkert. Der damit verbundene Energiezuwachs bzw. -verlust ist direkt gegeben durch

$$d\vec{r} d\vec{v} \left(\frac{d\mathbf{f}_e}{dt} \right) \cdot \left\{ \frac{1}{2} m_e v^2 \right\} .$$

Die totale Energieänderung der α -Spezies kommt also auf

$$d\vec{r} \int d\vec{v} \left(\frac{d\mathbf{f}_e}{dt} \right) \cdot \left\{ \frac{1}{2} m_e v^2 \right\} ,$$

was den entsprechenden Wert auf der Ionenseite aufwiegen muß, wenn die Gesamtenergie erhalten ist. Dasselbe gilt für den Impuls.

Die dritte Beziehung ist die *Kontinuitätsgleichung* der Ionen:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i w_{ih} v_{ih}) . \quad (2.10)$$

Gln. (8-10) bestimmen die 3 Ionenvariablen ρ, w, w_{ih} .

Wir müssen noch für *Quasineutralität* sorgen. Die hier ins Auge gefassten Zeitskalen sind *gross* gemessen an der Periode der Plasmafrequenz. Abweichungen von der Neutralität spielen also keine Rolle (siehe Einleitung). Deshalb ist es überflüssig, die Poissongleichung zu lösen. Stattdessen fordern wir direkt

$$\rho_e(t, x) = \rho_p(t, x) . \quad (2.11)$$

Die Poisson-Differentialgleichung im elektrischen Potential φ wurde also ausgetauscht gegen eine *algebraische* Gleichung. Weil die Poissongleichung von 2. Ordnung ist, kann man bei ihrer Lösung φ am linken und rechten Systemrand frei vorgeben, wobei aber nur der Potentialdifferenz physikalische Bedeutung zukommt. Beim Übergang auf die algebraische Bindung Gl. (11) bleibt diese Freiheit bestehen. Gehen wir nämlich im Einklang mit Gl. (11) von neutralen Startwerten aus, bedeutet dies im Weiteren $J' = 0$ (J = totaler elektrischer Strom). Frei bleibt somit ein von der Potentialdifferenz gesteuerter homogener elektrischer Nettostrom. In den Anwendungen machen wir von der Möglichkeit Gebrauch, je nach physikalischer Fragestellung, diesen Strom entweder zu unterdrücken (wobei der Code dann die auftretende 'Gegenspannung' als Ergebnis liefert), oder eine bestimmte Potentialdifferenz festzulegen.

In Gl. (11) tritt φ nicht mehr auf. Da φ jedoch durch die Beziehung

$$\varphi' = -\epsilon$$

mit der elektrischen Feldstärke ϵ (Appendix 6.2.) verknüpft ist, wirkt es auf ρ_e indirekt über den Beschleunigungsterm der substantiellen Ableitung Gl. (3) in $\mathcal{F} - \mathcal{P}$. Das Gleichungssystem bleibt also regulär. Physikalisch bedeutet Gl. (11) die Forderung, daß die vom elektrischen Feld hervorgerufene Beschleunigung gemeinsam mit den anderen auf die mittleren Geschwindigkeiten beider Spezies wirkenden Kräften keine Ladungstrennung herbeiführen. Unter dem Strich besteht das Modell somit aus Gln. (1, 8–11). Die Liste der *abhängigen* Variablen lautet

$$f_e(t, x, \vec{v}) , \rho(t, x) , w(t, x) , w_{th}(t, x) , \varphi(t, x) .$$

Unabhängig veränderlich sind

$$t , x , \vec{v} .$$

In der Einleitung kam bereits zur Sprache, daß die Verteilungsfunktion der Elektronen nach *Burnettfunktionen* zerlegt wird (Appendix 6.3., 6.4.) :

$$f_e(t, x, \vec{u}) = \sum_{l, n \geq 0} c_{ln}(t, x) B_{ln}(\vec{u}) e^{-u^2} .$$

Das ändert die Lage wie folgt: *Abhängige* Variable sind jetzt

$$c_{ln}(t, x); l, n \geq 0 , \rho(t, x) , w(t, x) , w_{th}(t, x) , \varphi(t, x)$$

und *unabhängig* nurmehr

$$t, x .$$

Die Bestimmungsgleichungen der c_{ln} werden aus $\mathcal{F} - \mathcal{P}$ gewonnen unter Ausnutzung der *Orthogonalität* der B_{ln} (7.3.) und haben die allgemeine Form

$$\dot{c}_{ln}(t, x) = \mathcal{Y}_{ln}(t, x, c(t, x), c'(t, x), w(t, x), w_{th}(t, x), \varphi(t, x)); \quad l, n \geq 0 .$$

c, c' bezeichnet die Gesamtheit der c_{ln} bzw. deren Ableitungen. Es handelt sich um ein System gekoppelter, nichtlinearer partieller Differentialgleichungen in x und t . Natürlich sind einer numerischen Analyse nur endlich viele c_{ln} zugänglich. Man muß also 2 *Abschneideparameter* l_{max}, n_{max} einführen, um die Liste zu begrenzen :

$$c_{ln}(t, x); 0 \leq l \leq l_{max}, 0 \leq n \leq n_{max} , \quad \rho(t, x) , w(t, x) , w_{th}(t, x) , \varphi(t, x) . \quad (2.12)$$

Dieser Eingriff wird in Zukunft mit dem Namen *Abschneidenäherung* belegt.

Energie- und Impulsbilanz Gl. (8, 9) müssen noch in den abhängigen Variablen Gl. (12) ausgedrückt werden. Das im Appendix (7.2.) aufgeführte Resultat sind 2 kubisch-nichtlineare partielle Differentialgleichungen.

2.2. VERGLEICH MIT ANDEREN KINETISCHEN MODELLEN

"Und bist du ... denn

*kein gewaltigerer Analytiker als 'Gugelplex Sterndenker' ...,
der die Flugbahn jedes Staubeilchens*

während eines 5-wöchigen Sandsturms ... berechnen kann?"

D.Adams, Per Anhalter durch die Galaxis

In diesem Paragraphen soll das in der vorliegenden Arbeit durchgerechnete Modell gegen verwandte Ansätze abgegrenzt werden. Die möglichen Vergleiche lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten gruppieren, nämlich im Hinblick auf

1. die zugrunde liegenden *physikalischen* Voraussetzungen, also das physikalische Modell
2. das zur Berechnung des Modells herangezogene mathematisch - numerische Verfahren
3. bei einem Computer-Code: Schnelligkeit und Flexibilität

Vergleiche werden gezogen mit den Arbeiten von Matte¹³, Luciani¹⁴, Khan¹⁵, Shvarts¹⁶, Takizuka¹⁷, Shirazian¹⁸, Chodura¹⁹, Jorna⁷ und Spitzer³.

Die Arbeit von Spitzer verdient besondere Beachtung, nicht nur weil sie ca. 35 Jahre alt ist und auf semi-analytischen Rechnungen basiert, sondern weil alle erwähnten Autoren sich auf ihre Resultate beziehen. Spitzer liefert Werte für Wärme- und Teilchenfluß im Lorentzgas (ruhende Ionen vgl. 6.8.) als Funktion des lokalen Temperaturgradienten und des elektrischen Feldes, welche im Folgenden auch als die '*lokalen* Werte' angesprochen werden, da sie im Gegensatz zu den Fokker-Planck-Ergebnissen ausschliesslich von den lokalen Werten der Temperatur und ihrer Ableitung abhängen (vgl. 6.8.). Bei kleinen Feldern und Gradienten werden nicht-lokale Effekte immer unbeträchtlicher, und die Fokker-Planck-Rechnungen sollten die Spitzer-Werte reproduzieren.

Wenden wir uns dem 1. Punkt zu:

Alle zitierten Arbeiten, die vorliegende eingeschlossen, sind räumlich eindimensional. Eine zu den Gradienten der Plasmaparameter orthogonale Magnetfeldkomponente taucht nur bei [Chodura] auf. Alle anderen Autoren beschränken sich auf *Parallel*transport.

In unserer Arbeit und bei [Jorna] werden die Elektron-Elektron-Stöße exakt mitgenommen. Alle anderen genannten Autoren benutzen eine vereinfachte Version des Elektron-Elektron-Stoßoperators. Die Vereinfachung besteht z.B. darin, daß bei der Ermittlung der Rosenbluthpotentiale Φ_e, Ψ_e gemäß Gl. (5,6) nicht die volle Feldteil-

chenverteilung f_e eingesetzt wird, sondern nur deren *maxwellsche* (Khan, Shvarts) oder etwas allgemeiner *isotrope* (Matte) Komponente, um die Integration zu erleichtern. Luciani verwendet den Stoßoperator in seiner asymptotischen Form für große Geschwindigkeiten mit dem Argument, daß für den Energietransport hauptsächlich die schnellen Elektronen verantwortlich sind.

Alle erwähnten Vereinfachungen laufen darauf hinaus, daß der für den Transport verantwortliche *anisotrope* Anteil der Elektronenverteilung nur noch *linear* auf der Testteilchenseite in Erscheinung tritt. Die Stöße erfolgen an isotrop verteilten Feldteilchen.

Man kann vermuten, daß die auf solchen Rechnungen fußenden Werte für Massen- und Energieströme tendentiell unter den wahren Werten liegen. Denn die Testteilchen erfahren eine übertriebene Reibung an den Feldteilchen, weil die Feldteilchen wegen ihrer isotropen Verteilung weder Masse noch Energie transportieren. Dieser Verdacht wird von den Ergebnissen (6.4.) bestätigt.

Eine Ausnahme bildet in dieser Hinsicht Spitzer, der zwar linearisiert, jedoch die bei Selbststößen symmetrischen Rollen von Test- und Feldteilchen respektiert, indem er auch Stöße zwischen isotropen Testteilchen und anisotropen Feldteilchen in Betracht zieht. Er bedient sich dabei aber nicht des Rosenbluth-Formalismus. Im Grenzfall kleiner elektrischer Felder oder grosser Temperaturabfallängen (gemessen in freien Weglängen) kommt er sogar näher an die korrekten Werte heran als die 'unsymmetrischen' numerischen Rechnungen.

Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal ist die Art und Weise wie den Ionen Rechnung getragen wird. Im allgemeinen idealisiert man sie als ruhend, beschränkt sich also auf das Lorentzgas. Ausnahmen sind Chodura und die vorliegende Arbeit. Letztere modelliert die Ionen als bewegliche Maxwellverteilungen variabler Temperatur. Das Ionenmodell besitzt also keine konduktive Wärmeleitung. Eine solche Vereinfachung ist gerechtfertigt solange die Ionen viel schwerer sind als die Elektronen, da ihre Beiträge zur Wärmeleitung sich zueinander verhalten wie $\sqrt{m_e} : \sqrt{m_p}^6$.

Zu Punkt 2 :

Eine grobe Aufteilung der numerischen Verfahren bietet das Kriterium, ob es sich um einen Monte-Carlo-Code handelt oder nicht.

Eine Monte-Carlo-Simulation führen in obiger Liste nur Chodura und Khan aus. Dabei wird eine begrenzte Zahl zufallsverteilter Ladungsträger durch das Coulomb-Gesetz miteinander in Wechselwirkung gebracht und jede einzelne Trajektorie direkt nachvollzogen. Alle anderen Autoren lösen explizit die Fokker-Planck-Gleichung, wobei sie

die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen nach *Legendre*-Polynomen im Winkel θ gegen die x -Achse zerlegen und finite Differenzen im Absolutbetrag v der Geschwindigkeit benutzen. In der vorliegenden Arbeit wird die Verteilungsfunktion auch in v entwickelt, und zwar nach *Laguerre*-Polynomen (vgl. 6.3.).

Beide Ansätze sind in gewissem Sinn komplementär: Die Monte-Carlo-Methode liefert schnell qualitative Aussagen. Auch ist eine genaue, den Charakteristiken gemäße Vorgabe der Verteilungsfunktion an den Rändern leicht zu implementieren. Dafür ist die Konvergenz gegen die quantitativ richtige Lösung langsam. Dagegen hat eine direkte Berechnung der Fokker-Planck-Gleichung den Nachteil, daß es schwieriger ist, detaillierte Randbedingungen aufzuprägen, vor allem wenn die Geschwindigkeitsverteilung, wie in unserer Arbeit, durch die Koeffizienten eines Funktionensystems (Burnettfunktionen B_{ln}) gegeben ist. Der Vorteil ist allerdings, daß die Konvergenz viel schneller ist, wenn die Funktionenbasis der spezifischen Situation gut angepasst ist, und die Lösung sich bereits mit wenigen Basisfunktionen zufriedenstellend approximieren läßt. Beispielsweise genügt zur Darstellung einer Maxwell-Verteilung ein einzige Burnettfunktion nämlich B_{00} (6.4). In nahezu stoßfreien Plasmen kann sich jedoch die Verteilungsfunktion stark von einer Maxwellverteilung unterscheiden. Eine gute Approximation erfordert dann die Einbeziehung vieler Burnettfunktionen in den Modellraum, mit anderen Worten grosse Abschneideparameter, was die Rechenzeit in die Höhe treibt. In solchen Fällen eignen sich Monte-Carlo-Verfahren besser, weil sie direkt die Trajektorien einzelner Teilchen verfolgen.

Punkt 3 :

Was das Studium der *zeitlichen Evolution* anbetrifft, so ist der im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Code in der Lage, über mehrere hundert Elektronen-Stoßzeiten verlaufende Szenarien im allgemeinen binnen weniger CPU - Minuten durchzurechnen, u.a. dank der Tatsache, daß bei der Ermittlung des E -Feldes die Poisson-Gleichung und damit die kurze Zeitskala der Plasmafrequenz umgangen wurden. Dies ist gerechtfertigt, weil Zeit- (Plasmaperiode) und Ortsskala (Debyelänge) der Ladungsfluktuationen *klein* sind gegen typische Systemzeiten und -längen. Die wirkliche Zeitabhängigkeit des Systems wird sehr gut erfasst, wie Konvergenzstudien im Zeitschritt beweisen. Der Code ist besonders schnell, wenn die Ionenmasse unendlich ist (Lorentzgas) oder in der Nähe der Elektronenmasse liegt (4.6.1.). Denn dann spielt sich die Relaxation zum stationären Gleichgewicht ausschliesslich auf der schnellen Elektronenzeitskala ab; die andernfalls viel langsamere Ionenzeitskala entfällt. In beiden Grenzfällen wird der stationäre Endzustand oft bereits in unter 1 CPU-Minute erreicht. Im ersten Fall

kann überdies der *Ladevorgang* viel effizienter vonstatten gehen (vgl 3.4.).

Bei allen anderen Autoren (inclusive Jorna) wird die Spanne der Zeitintegration empfindlich begrenzt durch die, wenn auch künstlich verlängerte Plasmaperiode, da sie das E -Feld aus den Abweichungen von der Neutralität über die Poisson-Gleichung bestimmen. Luciani beschränkt sich auf das Studium stationärer Gleichgewichte.

Zusammenfassend halten wir fest: Neu an dem hier entwickelten Code ist die Vereinigung folgender Eigenschaften:

- Die Ionen sind beweglich, wenn auch nur im Rahmen eines Flüssigkeitsmodells als verschobene Maxwellverteilungen variabler Temperatur.
- Unter dieser Voraussetzung werden sämtliche Stoßoperatoren exakt ermittelt.
- Die Fokker-Planck-Gleichung wird für beide Spezies zeitabhängig gelöst.
- Der Code arbeitet sehr schnell. Zeitintegration über mehrere hundert Elektronen-Stoßzeiten erfolgt binnen weniger CPU-Minuten. Meistens genügt diese Zeitspanne zum Erreichen des stationären Endzustands, falls ein solcher existiert.
- Die schnelle Zeitintegration ermöglicht auch das Studium divergenter Prozesse, welche in keinen stationären Zustand laufen, z.B. run-away der Elektronen.
- Die Zerlegung der Verteilungsfunktion nach Burnettfunktionen wurde auf unser Problem zum ersten Mal in grösserem Maßstab angewendet.

3. Numerik und Programmaufbau

3.1. DISKRETISIERUNG IN ORT UND ZEIT

Wir beschreiben die Diskretisierung im Ort am Beispiel der Abschneideparameter

$$l_{\max} = 3 \quad , \quad n_{\max} = 4 \quad ,$$

welche auch den gezeigten Anwendungen zugrunde liegen. Dies bedeutet, daß auf der Seite der Elektronen nur

$$c_{ln}(t, x) ; \quad \text{für } l = 0, \dots, 3, \quad n = 0, \dots, 4$$

als abhängige Variable in Betracht kommen. Der vollständige Satz abhängiger Variablen lautet also

$$\begin{aligned} & c_{ln}(t, x) ; \quad \text{für } l = 0, \dots, 3, \quad n = 0, \dots, 4 \\ & \rho(t, x) \\ & w_p(t, x) \\ & T_p(t, x) \\ & \varphi(t, x) \quad \text{mit} \quad \varphi' = -\epsilon \end{aligned} \quad (3.1)$$

Jeder dieser

$$(l_{\max} + 1)(n_{\max} + 1) + 4 = 24$$

Variablen muß eine Bestimmungsgleichung zugeordnet werden.

Was die c_{ln} anbelangt, so werden sie jeweils durch $\mathcal{F} - \mathcal{P}$ in der Form

$$\dot{c}_{ln} = \dots ; \quad \text{für } l = 0, \dots, 3, \quad n = 0, \dots, 4$$

festgelegt.

Den Variablen ρ, w_p, T_p werden respektive Kontinuitäts-, Impulsbilanz- und Energiebilanzgleichung zugeordnet.

Zur Bestimmung von φ bedienen wir uns der Neutralitätsbedingung

$$\rho(t, x) = c_{00}(t, x) \quad .$$

Nun zur Plazierung der Variablen auf dem Gitter. Wir unterscheiden zwischen Zellzentren ($\times$) und Zellwänden ($|$). Dann besteht folgende Zuordnung :

$$\begin{aligned}
 \varphi(t, x) &\longrightarrow \times \\
 \rho(t, x) &\longrightarrow \times \\
 T_p(t, x) &\longrightarrow \times \\
 c_{ln}(t, x) ; \quad \text{für } l = 0, 2, \quad n = 0, \dots, 4 &\longrightarrow \times \\
 w_p(t, x) &\longrightarrow | \\
 c_{ln}(t, x) ; \quad \text{für } l = 1, 3, \quad n = 0, \dots, 4 &\longrightarrow |
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dementsprechend sind die Bestimmungsgleichungen in den Zentren oder auf den Flächen erklärt :

$$\begin{aligned}
 \text{Neutralität} &\longrightarrow \times \\
 \text{Kontinuität} &\longrightarrow \times \\
 \text{Energiebilanz} &\longrightarrow \times \\
 \mathcal{F} - \mathcal{P} ; \quad \text{für } l = 0, 2, \quad n = 0, \dots, 4 &\longrightarrow \times \\
 \text{Impulsbilanz} &\longrightarrow | \\
 \mathcal{F} - \mathcal{P} ; \quad \text{für } l = 1, 3, \quad n = 0, \dots, 4 &\longrightarrow |
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Diese Plazierung hat die Eigenschaft, daß die vorkommenden Ortsableitungen der abhängigen Variablen zumeist durch zentrierte finite Differenzen nächster Nachbarn ausgeführt werden können. Falls die Ionen *ruhen* (Lorentzgas), gilt dies sogar *immer*. In diesem Grenzfall sind alle in den Zellzentren erklärten Grössen *dichtartig*, während die Grössen an den Zellgrenzen *Flusscharakter* haben. Sind die Ionen beweglich, müssen nur selten zentrierte Differenzen übernächster Nachbarn gebildet werden.

Was die Diskretisierung in der Zeit anbelangt, so werden die c_{ln} , sprich die 'Elektronenvariablen', voll implizit behandelt, und zwar sowohl in den Elektronen- ($\mathcal{F} - \mathcal{P}$) als auch in den Ionengleichungen.

Die Ionenvariablen werden in den Ionengleichungen einem Crank-Nicholson-Schema (halb explizit - halb implizit) unterworfen.

In den Elektronengleichungen treten sie außer in Zeitableitungen nur explizit als 'alte Variable' in Erscheinung. Abgesehen von erheblichen Einsparungen an Aufwand und Rechenzeit, liegt die Rechtfertigung darin, daß sich die Ionenvariablen gemessen an der Elektronenzeitskala wegen ihrer grösseren Trägheit nur langsam verändern.

3.2. RANDBEDINGUNGEN UND QUELLEN

Der übliche Zugang zur Frage der Randbedingungen besteht in der Analyse der Charakteristiken des zur Debatte stehenden Systems. Für die Fokker-Planck-Gleichung besagt die Charakteristikentheorie, daß an jeder räumlichen Systembegrenzung nur die Verteilung der in das System *hineinlaufenden* Teilchen vorgeschrieben werden kann. Zwecks Illustration ein Beispiel:

Gegeben seien 2 gegenläufige Strahlen monoenergetischer Teilchen, die sich stoßfrei durchdringen. Demnach besitzt die zugehörige Verteilungsfunktion im Geschwindigkeitsraum 2 symmetrisch um den Ursprung plazierte Spitzen und ist ansonsten Null. Um Dichte und Geschwindigkeit beider Strahlen einzustellen, wird man diese Werte, der Kausalität gehorchend, für die nach rechts laufende Gruppe linkerhand vorschreiben und umgekehrt. Dies gelingt aber nur, wenn der Geschwindigkeitsraum in Zellen aufgeteilt ist, deren Inhalte sich unabhängig voneinander manipulieren lassen.

Bezeichnend für die hier ergriffene Methode ist jedoch die Entwicklung der Verteilungsfunktion nach Burnett-Funktionen (Gl. (2.11)). Diese erstrecken sich über den *gesamten* Geschwindigkeitsraum, sind also nicht etwa in überdeckender Weise jede an einer andern Stelle lokalisiert. Eine detaillierte, den Charakteristiken gemäße Vorgabe der Geschwindigkeitsverteilung ist demnach nur im Grenzfall unendlich vieler Burnett-Funktionen möglich.

Stattdessen erweist es sich als zweckmässig, zu fordern :

$$\left. \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right|_{Rand} = 0 \quad ,$$

wobei Y für die Variablen aus Gl. (1) steht. Diese 'schwache', unphysikalische Randbedingung dient der Lösung der diskretisierten Gleichungen: Ausserhalb des eigentlichen Rechengebietes sind links und rechts Punkte angeheftet, wohin die Lösung *linear extrapoliert* wird. Diese Hilfspunkte haben den Sinn, daß man bei der Bildung zentrierter Ortsableitungen am Rand des Rechengebiets auf die Werte an diesen Stellen zurückgreifen kann.

Die eigentlichen *physikalischen* Randwerte werden durch *Quellen* bzw. *Senken* aufrechterhalten, welche sich über 'Bäder' an beiden Systemenden erstrecken. Für Dichten und Temperaturen beider Spezies ist das leicht machbar, da sie mit bestimmten Variablen direkt verknüpft sind :

$$\rho_p = \rho \quad \rho_e = c_{oo} \quad T_p \quad T_e = \tilde{v}_{th}^2 = v_{th}^2 \left\{ 1 - \frac{c_{o1}}{c_{oo}} \right\} \quad .$$

Die Badzonen müssen lang genug sein, um vom Rand kommende Störungen abfangen zu können. Andernfalls hängen die Ergebnisse von ihrer Länge ab.

Diese Methode erlaubt eine sehr flexible Handhabung der Randbedingungen. Die Grundidee - Erzwingung der Randbedingungen durch Quellen und Senken am Rand des Rechengebietes - hat sich auch bei anderen physikalischen Anwendungen (z.B. zweidimensionale, hydrodynamische Formulierung der Plasmarandschicht²⁰) als erfolgreich erwiesen.

3.3. UMSETZUNG DURCH DEN CODE

Am Beispiel der Kontinuitätsgleichung (Gl. B 7.4)

$$0 = \dot{\rho} + \sqrt{m_r} (\rho w_p)' \quad (3.4)$$

soll nun gezeigt werden, nach welchem Schema der Code mit *allen* Bestimmungsgleichungen, nämlich $\mathcal{F} - \mathcal{P}$ und Gl. (1, 2, 3), verfährt. Der Platzierung der Variablen Gl. (2) und Gleichungen Gl. (3) gemäß, lautet die Ortsdiskretisierung von Gl. (4)

$$0 = \dot{\rho}_k + \sqrt{m_r} \left\{ \rho_k \frac{1}{\Delta x} (w_{pk+\frac{1}{2}} - w_{pk-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} (w_{pk+\frac{1}{2}} + w_{pk-\frac{1}{2}}) \frac{1}{2\Delta x} (\rho_{k+1} - \rho_{k-1}) \right\}$$

Diskretisierung in der Zeit nach Crank-Nicholson ergibt linearisiert²¹

$$\rho_k = \hat{\rho}_k + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\sqrt{m_r}}{2} \left\{ \hat{\rho}_k (w_{pk+\frac{1}{2}} - w_{pk-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4} (w_{pk+\frac{1}{2}} + w_{pk-\frac{1}{2}}) (\hat{\rho}_{k+1} - \hat{\rho}_{k-1}) + \rho_k (\hat{w}_{pk+\frac{1}{2}} - \hat{w}_{pk-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4} (\hat{w}_{pk+\frac{1}{2}} + \hat{w}_{pk-\frac{1}{2}}) (\rho_{k+1} - \rho_{k-1}) \right\} \quad (3.5)$$

Die Variablen zur neuen Zeit sind durch $\hat{}$ markiert. Gl. (5) hat die Form

$$\hat{F}_k^0 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \hat{F}_k^1 = F_k^0 + \frac{\Delta t}{\Delta x} F_k^1, \quad (3.6)$$

sofern man setzt

$$\hat{F}_k^0 = \hat{\rho}_k, \quad (3.7)$$

$$\hat{F}_k^1 = \frac{\sqrt{m_r}}{2} \left\{ \hat{\rho}_k (w_{pk+\frac{1}{2}} - w_{pk-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4} (w_{pk+\frac{1}{2}} + w_{pk-\frac{1}{2}}) (\hat{\rho}_{k+1} - \hat{\rho}_{k-1}) + \rho_k (\hat{w}_{pk+\frac{1}{2}} - \hat{w}_{pk-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4} (\hat{w}_{pk+\frac{1}{2}} + \hat{w}_{pk-\frac{1}{2}}) (\rho_{k+1} - \rho_{k-1}) \right\}, \quad (3.8)$$

$$F_k^0 = \rho_k, \quad (3.9)$$

$$F_k^1 = 0. \quad (3.10)$$

F_k^0, F_k^1 sind Polynome in den *alten* Variablen (i.a. bis zur 3. Ordnung).

$\hat{F}_k^0, \hat{F}_k^1$ sind *linear* in den *neuen* Variablen; deren Koeffizienten sind wiederum Polynome in den *alten* Variablen (i.a. bis zur 2. Ordnung). Ein Programmsegment (LD1) sucht nun alle $\neq 0$ - Koeffizienten von F_k^0, F_k^1 und aller Koeffizientenpolynome in $\hat{F}_k^0, \hat{F}_k^1$ und speichert sie auf Cray-Platte. Das Ergebnis lautet für Gl. (4)

```

/EOF
CNTNWO
26, 1
1., 0, 0
CNTNW1
2, 2
-0.125, 14, 0
-0.125, 38, 0
14, 3
-0.125, 2, 0
-0.5, 26, 0
0.125, 50, 0
26, 2
-0.5, 14, 0
0.5, 38, 0
38, 3
-0.125, 2, 0
0.5, 26, 0
0.125, 50, 0
50, 2
0.125, 14, 0
0.125, 38, 0
CNT0
1
1., 26, 0, 0
CNT1
0

```

CNT bedeutet 'Kontinuitätsgleichung' *NW* heißt 'neu'. Die *reellen* Zahlen sind die Koeffizienten, dahinter stehen jeweils die Indizes der alten Variablen, mit denen sie multipliziert werden müssen. Durchnummeriert wird auf dem Ortsgitter von links nach rechts. Bei $l_{max} = 3, n_{max} = 4$ haben wir insgesamt 24 *lokale* Variable. Das Gitter beginnt mit dem Hilfspunkt $k = -1$, die Zählung bei 1. Dann entnimmt man der Zuordnung Gl. (2) :

$$\rho_{-1} \leftrightarrow 2 \quad \rho_0 \leftrightarrow 26 \quad \rho_1 \leftrightarrow 50$$

$$w_{p-\frac{1}{2}} \leftrightarrow 14 \quad w_{p\frac{1}{2}} \leftrightarrow 38$$

Die Zeilen, welche nur *natürliche* Zahlen enthalten, geben in den *NW* - Listen an, zu welcher neuen Variable das betreffende Polynom gehört und *wieviele* $\neq 0$ - Koeffizi-

enten es besitzt. In den beiden 'alten' Listen enthalten sie nur die Zahl der $\neq 0$ - Koeffizienten.

Allgemein sind die Koeffizienten Funktionen von $v_{th}(x)$ und $v'_{th}(x)$ der Form

$$K(v_{th}, v'_{th}) = K_0(v_{th}) + v'_{th} K_1(v_{th}) \quad . \quad (3.11)$$

Bei einem Basiswechsel

$$v_{th} \rightarrow \hat{v}_{th}$$

müssen die Koeffizienten also neu ermittelt werden. Sehr zeitaufwendig wäre es, dafür jedesmal das volle Such-Segment ablaufen zu lassen. Stattdessen wurde folgender Ausweg eronnen:

Das Suchsegment wird *einmal* betätigt für einen exponentiellen Verlauf von v_{th}

$$v_{th}^+(x) = e^x \quad , \quad (3.12)$$

und ein *zweites* Mal für die an $x = 0$ gespiegelte Kurve

$$v_{th}^-(x) = e^{-x} \quad . \quad (3.13)$$

Die Systemmitte liege bei $x = 0$.

Die resultierenden Koeffizienten-Listen K^+ und K^- werden abgespeichert. Diese Prozedur soll *Vorladen* genannt werden (*LD1*).

Sei nun $v_{th}(x)$ eine beliebige Basis. Dann gewinnt man die zugehörigen Koeffizientenfelder $K_0(x), K_1(x)$ mittels folgender Vorschrift:

Zu jedem x existiert ein x^+ , so daß

$$v_{th}(x) = v_{th}^+(x^+) \quad , \quad (3.14)$$

also auch (Gl. (13))

$$v_{th}(x) = v_{th}^-(-x^+) \quad \text{und} \quad v_{th}'(x) \Big|_{x=x^+} = -v_{th}'(x) \Big|_{x=-x^+} \quad . \quad (3.15)$$

Wegen Gl. (11) folgt daraus

$$K_0(x) = \frac{1}{2} \left(K^+(x^+) + K^-(-x^+) \right) \quad \text{und} \quad (3.16)$$

$$K_1(x) = \frac{\frac{1}{2} \left(K^+(x^+) - K^-(-x^+) \right)}{v_{th}'(x^+)} \quad .$$

Aus Gl. (16) werden dann über Gl. (11) die endgültigen Koeffizientenfelder $K(x)$ gefunden und gespeichert. Dieser Algorithmus heiße *Nachladen* (*LD2*).

Ein Lauf-Segment (*RN*)

- greift auf die abgespeicherten Daten zurück
- baut daraus mit Hilfe der alten Lösung Gl. (2) linke und rechte Seite des linearen Gleichungssystems Gl. (3) zusammen
- führt die Zeitintegration aus und schreibt den ganzen Prozess auf Cray-Platte.

Die zweistufige Aufteilung des Code in einen Lade- und einen Lauf-Abschnitt bietet folgende wesentliche Vorteile gegenüber einer direkten, einstufigen Berechnung der Matricelemente aus den Grundgleichungen:

- Die bei jedem Zeitschritt erforderliche Neubildung der Matricelemente aus der alten Lösung erfolgt mit *minimalem* Aufwand; es müssen lediglich die $\neq 0$ -Koeffizienten mit den entsprechenden Komponenten des alten Lösungsvektors algebraisch multipliziert werden. Diese Prozedur wurde so implementiert, daß sie im Gitterindex k *vektoriert*. Auf diese Weise erreicht man, daß die Rechenzeit, welche bei jeder Iteration zur Bereitstellung der Inversionsmatrix benötigt wird, nicht von der Zahl der Ortsgitterpunkte abhängt.
- Modifikationen in den Grundgleichungen lassen sich ohne grosse Mühen bewerkstelligen. Das Lauf-Segment bleibt davon völlig unberührt. Man muß nur die Datei aufsuchen, die das betreffende Gleichungsstück enthält, z.B. *CNTNW1*, die gewünschte Änderung vornehmen und anschliessend das Koeffizienten-Suchverfahren (Lade-Segment) für diesen Teil neu laufen lassen. Das gilt insbesondere auch, wenn man am *implicit factor* der Zeitintegration oder beim Diskretisierungsschema im Ortsraum etwas umstellen will. Grundlegende Änderungen lassen sich also mit sehr lokalen Eingriffen in die Programmstruktur erledigen. Daß dies die Fehlerquelle 'Mensch' dezimiert, versteht sich von selbst.

Ein Output-Segment (*OT*) liest die rohen Daten wieder auf und verwandelt sie in Kurven.

Die Berechnung der Stoßoperatoren* erfolgt durch *ELION* und *ELEL*. Der von diesen Segmenten erzeugte Output steht auf Cray-Platte und wird von *LD1* als Input angefordert.

* 1.1,1.2

Die Struktur des Code ist also grob:

ELION *ELEL*

⇓

LD1

⇓

LD2

⇓

RN

⇓

OT

3.4. BEMERKUNGEN ZUR RECHENZEIT

ELION und *ELEL* konsumieren jeweils ca. 1 CPU-Stunde.

Das Nachladen (*LD2*) passiert in weniger als 10 Sekunden, im Gegensatz zum Vorladen (*LD1*), welches bei den hier präsentierten Rechnungen bis zu 3 Stunden gedauert hat.

Die Zeitintegration (*RN*) wird meistens in unter 300 Sekunden absolviert.

Das Outputsegment (*OT*) braucht i.a. nicht länger als 60 Sekunden.

Das 'Haupthindernis' bei der Abwicklung des Programms ist also *LD1*. Dazu einige Kommentare:

- Die von *LD1* benötigte Rechenzeit skaliert ca. mit der 3. Potenz der Zahl der lokalen Variablen (hier 24), weil die analysierten Multinome bis 3. Ordnung sind.
- Man kann *stückweise* vorladen, so daß die einzelnen Fragmente (meistens schneller als 300 Sekunden) mit hoher Priorität abgearbeitet werden.
- *LD1* muß nur dann neu aufgerufen werden, wenn man das Massenverhältnis m_p oder die Abschnideparameter l_{max}, n_{max} verändern will.
- Sind die Ionen ortsfest ($m_p = \infty$), wird das Problem *linear*, mit Ausnahme des quadratischen $\underline{E}$ -Terms in der substantiellen Ableitung und der Elektronen-Selbstwechselwirkung. Ausserdem verringert sich die Bandbreite der Matrix, weil,

wie man sich überzeugen kann, in den Ortsableitungen *keine übernächsten* Nachbarn mehr vorkommen. Dann geht das Koeffizienten-Suchen wesentlich schneller, weil Ordnung und Länge der Multinome zurückgegangen sind. Die geringere Bandbreite beschleunigt auch die Zeitintegration. Unter diesen Umständen ließe sich die Zahl der Elektronenvariablen c_{ln} von jetzt 20 auf 40 verdoppeln, ohne zu hart an Rechenzeitgrenzen zu stossen.

4. Tests und Anwendungen

4.1. ALLGEMEINE RESULTATE UND INVARIANZ GEGENÜBER DER SKALA $v_{th}(x)$

Anhand eines konkreten Beispiels werden in diesem Paragraphen allgemeine Resultate gezeigt und diskutiert. Im Anschluss daran wird noch auf eine wichtige Invarianzeigenschaft der Lösungen eingegangen.

Gegeben sei ein Lorentzgas (1.7). Wir unterteilen es in 3 Bereiche: ein Wärmebad hoher Temperatur, ein Wärmebad niedriger Temperatur, und ein quellenfreies Stück dazwischen. In den Bädern halten Wärmequellen bzw. -senken die Elektronentemperatur stets auf dem selben Wert. Dies geschieht nach dem Thermostatprinzip: nach jedem Zeitschritt wird die Temperatur in den Bädern 'gemessen' (Ist-Wert), mit dem Soll-Wert verglichen und um die Differenz ergänzt (vgl. 3.2.). Genauer gesagt wird die Temperatur so manipuliert, daß sie *im zeitlichen Mittel* mit dem Sollwert übereinstimmt.

Die Dichte ρ sei *homogen*. Das System habe eine Länge von 12λ . Der Gitterabstand betrage $\frac{1}{2}\lambda$. Das zur hohen Temperatur ($T_e = T_B = 1.2$) gehörende Wärmebad erstreckt sich von 0 bis 3λ . Dasjenige zur niedrigen Temperatur ($T_e = T_B = 0.8$) reiche von 9 bis 12λ . Der Bereich zwischen 3 und 9λ ist quellfrei.

Die Geschwindigkeit der Elektronen $\vec{v}$ wird gemessen in Einheiten des ortsabhängigen Maßstabs $v_{th}(x)\vec{v}_{th}$. Die Wahl der lokalen Skala $v_{th}(x)$ ist willkürlich, genauso wie man einen Vektor in jeder beliebigen Basis darstellen kann. Dennoch ist in unserer konkreten Situation folgender Verlauf von $v_{th}(x)$ besonders günstig: Man lege $v_{th}(x)$ so, daß die zeitunabhängige 'Basistemperatur' $T_B(x) = v_{th}^2(x)$ im freien Bereich linear abfällt und in den Bädern mit der (Soll-)Temperatur T_e der Elektronen zusammenfällt. Mit dieser Basis konvergiert die Burnettentwicklung der Verteilungsfunktion f_e vor allem in den Bädern besonders rasch; denn beispielsweise sind die Burnettkoeffizienten c_{ln} einer *Maxwell*-Verteilung, deren Temperatur gleich T_B ist, identisch Null, mit Ausnahme von c_{00} . In diesem Fall besteht die Entwicklung also nur aus dem ersten Glied. Die zwischen den Systemrändern anliegende elektrische Spannung wird so justiert, daß der elektrische Nettostrom J_e Null ist. Dessen ungeachtet kann immer noch *Energie* fließen, und zwar auf dem Wege, daß *energiereiche* Elektronen ins kalte Bad strömen und eine Gegenströmung *energiearmer* Elektronen für Nullabgleich des Nettostroms sorgt. Zu Beginn der Rechnung soll T_e auch im freien Bereich mit T_B übereinstimmen:

$$T_e(t = 0, x) = T_B(x); \quad 0 \leq x \leq 12\lambda \quad .$$

Mit diesen Anfangsbedingungen wird nach 80τ das stationäre Gleichgewicht erreicht. Das Orts-Zeitverhalten des Wärmestroms der Elektronen zu diesem Szenario ist in *Fig. 1.1.* wiedergegeben. Der Endzustand ist durch *Fig. 1.3.* , *Fig. 1.5.* charakterisiert, woraus folgende allgemeine Eigenschaften zu entnehmen sind:

- In der quellenfreien Zone ist der Elektronen-Wärmestrom Q_e im stationären Zustand konstant, wie es die Energieerhaltung verlangt. Q_e liegt systematisch unter dem klassischen Spitzer-Fluß Q_{SH} (6.8.). Diese Erscheinung wird mit *Flußhemmung* bezeichnet und ist umso ausgeprägter, je *steiler* die Temperatur über einer freien Weglänge abfällt.
- der klassische Spitzerfluß Q_{SH} bleibt im Gegensatz zu Q_e als Funktion des *lokalen* Temperaturgradienten auch im freien Bereich *ortsabhängig*.
- In den Bädern klingt Q_e nach beiden Seiten auf Null ab, was der Energiequelle im heißen bzw. -senke im kalten Bad zuzuschreiben ist. Das Eindringen des von *heissen* Elektronen getragenen Wärmeflusses in das kalte Bad nennt sich auch 'pre-heat'.
- das elektrische Feld ϵ (dimensionslos bezogen auf ϵ) ist durchweg positiv und am grössten zwischen den Bädern. Es wirkt dem Einfluß des Temperaturabfalls entgegen und stellt sicher, daß das heisse Plasmaintere keine Ladungsverluste durch nach außen gerichtete elektrische Ströme erleidet (electrostatic sheath).

Wir wollen nun demonstrieren, daß die Resultate nicht von der lokalen Skala $v_{th}(x)$ der Elektronengeschwindigkeit abhängen. Dazu gehen wir auf eine Temperaturbasis $\hat{v}_{th}$ über, die mit dem Verlauf der Elektronentemperatur im Endzustand der vorangegangenen Rechnung identisch ist :

$$\hat{v}_{th}(x) = \tilde{v}_{th}(t = \infty, x); \quad 0 \leq x \leq 12\lambda$$

und prüfen ob die Endzustände beider Szenarien übereinstimmen.

Das Orts-Zeitverhalten des Elektronenwärmestroms im 2. Lauf wird in *Fig. 1.2.* gezeigt. Der Endzustand ist durch *Fig. 1.4.* , *Fig. 1.6.* dokumentiert.

Man sieht, daß die Endzustände deckungsgleich, also tatsächlich invariant sind gegenüber der Skalentransformation

$$v_{th}(x) \rightarrow \hat{v}_{th}(x) .$$

Wie man dem Zeitverhalten des Wärmestroms entnimmt, konvergiert der 2. Lauf schneller, was daran liegt, daß die Startwerte wegen der angepassten Basis dem Endzustand näher sind.

4.2. SELBSTSTÖSSE UND ENERGIEERHALTUNG

Die exakte Elektron-Elektron-Wechselwirkung ist energieerhaltend. Der Code realisiert die Selbststöße der Elektronen im Rahmen eines begrenzten Modellraums (Abschneidenäherung: $l_{max} = 3, n_{max} = 4$). Das wirft die Frage auf, in welchem Maße die Modellraumbegrenzung die Energieerhaltung beeinträchtigt. Stösst man die Elektronen nur am *isotropen* Anteil ihrer Feldteilchen-Verteilung*, begeht man zusätzlich einen systematischen Fehler, der ebenfalls die Energiebilanz verletzen sollte. Dies wird nun geprüft.

Im Folgenden sind die Ionen unendlich massiv und ruhend (Lorentzgas). Sie können also von den Elektronen keine Energie aufnehmen. Gegeben seien ferner 2 Wärmebäder zwischen denen die Temperatur über 16 freie Weglängen um die Hälfte abfällt. Als Funktion von t betrachten wir nun den Energieverlust $\Phi_e(t)$, welchen das gesamte System seit Beginn der Rechnung bei $t_0 = 0$ bis zum Zeitpunkt t an einem festen Ort x im quellfreien Bereich aufgrund der verletzten Energieerhaltung erlitten hat. $\Phi_e(t)$ bezeichnet demnach (bis auf ein Vorzeichen) das zeitliche Integral der rechten Seite des Energieerhaltungssatzes (Gl. 6.10) bei verschwindender linker Seite.

Fig. 2.1. zeigt das Ergebnis bei voller Selbstwechselwirkung. Beschränkung auf die isotrope Komponente liefert *Fig. 2.2.* . Wie man sieht, hat sich Φ_e im *isotropen* Fall nach 1000 Stoßzeiten etwa um $\Delta\Phi_e = 0.2$ geändert. Dem steht ein $\Delta\Phi_e$ von ca. 0.002 in *Fig. 2.1.* gegenüber.

Tatsächlich rührt der in *Fig. 2.1.* angezeigte Energieverlust *nicht* von der Selbstwechselwirkung her, sondern geht auf das Konto der Elektronen-Ionen-Stöße, deren Berechnung im Grenzfall unendlicher Ionenmasse mit einem geringfügigen Fehler behaftet ist†.

Um mögliche andere Fehlerquellen auszumachen, wurde die Rechnung von *Fig. 2.1.* wiederholt mit

1. halber Ortschaftweite,
2. halber Zeitschrittweite,
3. $n_{max} = 3$ und $n_{max} = 2$.

In allen Fällen zeigte der Verlauf von $\Phi_e(t)$ nur unbeträchtliche Abweichungen von

*e.g. in [Matte]¹³⁾

†für den Code ist $m_p = \infty$ gleichbedeutend mit $m_p = 10^6 \times m_e$

Fig. 2.1. . Punkt 3 beweist insbesondere, daß die Abschneidenäherung keine nennenswerte Verletzung der Energiebilanz nachsichzieht. Eine *andere* Frage ist: Wie schlagen sich die Abschneideparameter l_{max}, n_{max} in den physikalischen Ergebnissen nieder ? Dem wird in (4.3.2.) nachgegangen.

Ein weiterer Ausdruck der Energieerhaltung im stationären Gleichgewicht ist die Konstanz des Wärmestroms Q_e über den quellfreien Bereich zwischen den Bädern. Wir wollen nun demonstrieren, wie diese Eigenschaft durch folgende Manipulation am Selbststoßoperator der Elektronen verlorengeht: Die in die Rosenbluthpotentiale eingehende Feldteilchenverteilung modellieren wir an jedem Ort x als Maxwellverteilung mit der zeitunabhängigen Basistemperatur $T_B(x)$. Die Elektronen stoßen also nicht mehr mit sich selbst, sondern befinden sich im Wärmeaustausch mit einer fiktiven Spezies gleicher Masse, deren Temperatur mit der Basistemperatur zusammenfällt. Wie in einem Wärmebad können sie Wärme von dieser Feldteilchen-Spezies empfangen bzw. an sie verlieren, wodurch der Wärmefluß über den Ort entsprechend anwächst bzw. abklingt. In Fig. 2.9. ist das Orts-Zeit-Verhalten von Q_e für einen solchen Fall dargestellt. Aufgetragen sind nach rechts x , nach hinten t und nach oben Q_e . In dieser Rechnung verhalten sich die Badtemperaturen zueinander wie 1.2:0.8. Der quellfreie Bereich erstreckt sich von $x = 3$ bis $x = 9$. Dort bleibt Q_e im stationären Endzustand tatsächlich ortsabhängig. Zum Vergleich ist in Fig. 2.4. das zum vollen Stoßoperator gehörende Szenario wiedergegeben. Man sieht, daß Q_e mit Erreichen des stationären Zustands im quellfreien Bereich ortsunabhängig wird, wie es die Energieerhaltung verlangt.

4.3. VERGLEICH MIT SPITZER-WÄRMELEITUNG

4.3.1. ORTSUNABHÄNGIGE KLASSISCHE WÄRMELEITUNG (QUELLEN)

In den Anwendungen dieses Abschnitts wird folgendes System untersucht.

Die Ionen sind unendlich massiv und ruhend (*Lorentzgas*) . Die Dichte ist homogen im Ort. Das zwischen den Systemrändern anliegende elektrische Potential φ wird durch feed-back so geregelt, daß *kein elektrischer Strom* fließt. Der Verlauf der Basistemperatur $T_B(x) = v_{th}^2(x)$ habe die Eigenschaft, daß der zugehörige Spitzer-Wärmefluß Q_{SH} (6.8.) nicht vom Ort abhängt. Die 'wahre' Wärmeleitung Q_e bleibt jedoch geringfügig ortsabhängig. Deshalb benötigt man im stationären Zustand Energiequellen und -senken, die sich über den ganzen Bereich erstrecken und die Elektronentemperatur $T_e(t, x)$ überall auf dem Wert von $T_B(x)$ festhalten.

$$\tilde{v}_{th}(t, x) = v_{th}(x) \quad , \quad (4.1)$$

$$v_{th}(x) = (1 - a(x - x_0))^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (4.2)$$

Wegen Gl. (1) konvergiert die Burnett-Entwicklung von f_e besonders rasch. Wie man sich leicht vergewissern kann, ist die aus Gl. (2) sich ergebende Spitzer-Leitung Q_{SH} tatsächlich ortsunabhängig. Die Systemlänge $\mathcal{L}_S$ (in freien Weglängen λ) und das Verhältnis der Temperaturen am linken und rechten Rand $T_{l/r}$ lassen sich mit Hilfe von a und x_0 aus Gl. (2) einstellen. $T_{l/r}$ wird konstant gehalten und $\mathcal{L}_S$ 'durchgestimmt'. Dadurch bekommt man den Quotienten aus Q_e und Q_{SH}

$$Q_{red} \equiv Q_e / Q_{SH}$$

als Funktion der auf λ bezogenen *Temperaturabfalllänge*

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_S / \ln(T_{l/r}) \quad .$$

Nach Fig. 3.1.1. erreicht Q_{red} mit zunehmendem $\mathcal{L}_T$ einen festen Pegel knapp über 1. Man befindet sich dann im stark stoßbehafteten Regime, wo die freie Weglänge *klein* ist gegen die Temperaturabfalllänge. In diesem Bereich sind die Voraussetzungen der Spitzer-Theorie erfüllt, und die Ergebnisse stimmen tatsächlich mit den Spitzer-Werten überein.

Mit zurückgehendem $\mathcal{L}_T$ fällt Q_{red} unter 1 ab. Dieses Phänomen heißt auch 'Flußhemmung' und ist am ausgeprägtesten im stoßfreien free streaming limit (vgl. Diskussion in 4.3.2.).

Stösst man die Elektronenverteilungsfunktion vereinfachend mit einer maxwellschen (M) oder etwas allgemeiner isotropen (I) Feldteilchen-Verteilung, so verringert sich Q_e . Das rührt daher, daß die Feldteilchen in diesen Konfigurationen keine Wärme transportieren und daher eine abbremssende Reibungskraft auf die Testteilchen ausüben. Wie man sieht, macht es in diesem Fall keinen Unterschied, ob man sich auf isotrope oder, noch restriktiver, maxwellsche Feldteilchen zurückzieht.

Das selbststoßfreie System besitzt i.a. *keine* stationären Lösungen, außer bei Beschränkung auf $n_{max} = 1$, i.e. wenn alle c_{ln} für $n > 1$ identisch Null sind. Eine solche Rechnung ist in Fig. 3.1.1. mit '1' markiert. Ins Auge springt die beträchtliche Abweichung vom korrespondierenden Spitzer-Wert†.

†vgl. 4.5.

4.3.2. ORTSUNABHÄNGIGE WAHRE WÄRMELEITUNG (KEINE QUELLEN)

Wir teilen unser System in 3 Stücke auf: ein Wärmebad hoher Temperatur, ein Wärmebad niedriger Temperatur, und ein quellenfreier Bereich dazwischen.

In den Bädern wird die Energiedichte der Elektronen (sprich Temperatur) durch Quellen räumlich wie zeitlich konstant gehalten. Der elektrische Strom wird wieder durch das angelegte elektrische Feld zu Null abgeglichen. Die Ionen sind unendlich massiv und ruhen (Lorentzgas). Nach ca. 50-100 Elektronenstoßzeiten stellt sich ein stationärer Zustand ein, wobei, wie es der Energiesatz verlangt, der Wärmefluß Q_e zwischen den Bädern *ortsunabhängig* wird.

Der lokale Spitzer-Fluß Q_{SH} bleibt jedoch als Funktion des sich ergebenden Temperaturverlaufs *ortsabhängig*. Er besitzt also im freien Bereich einen *minimalen* (Q_{SH}^{min}) und einen *maximalen* (Q_{SH}^{max}) Wert.

In Fig. 3.2.1.-3.2.10. sind einige Szenarien zusammengestellt. Variiert wurden

- die Systemlänge $\mathcal{L}_S$, i.e. die Ausdehnung des Bereichs zwischen den Bädern,
- das Verhältnis der Badtemperaturen $T_{l/r}$,
- die Art und Weise wie die Selbstwechselwirkung der Elektronen mitgenommen wird: ob Stösse mit dem vollen f_e (F) oder nur an dessen isotropem Anteil (I),
- die Option, ob *Druck* oder *Dichte* der Bäder übereinstimmen sollen,
- für Konvergenzstudien die Werte von l_{max}, n_{max} (Fig. 3.2.3., Fig. 3.2.4., Fig. 3.2.9., Fig. 3.2.10.) und die *Ortsschrittweite* h (Fig. 3.2.8.) .

Zum Vergleich sind überdies einige Ergebnisse aus [Matte]¹³ (M) eingezeichnet (Fig. 3.2.1., Fig. 3.2.2.).

Aufgetragen ist der Quotient

$$Q_{red} \equiv Q_e / Q_{SH}$$

gegen die inverse *Temperaturabfalllänge* (dimensionslos gemessen in freien Weglängen λ)

$$\mathcal{L}_T^{-1} \equiv T'_e / T_e$$

bzw. deren Mittelwert im freien Bereich

$$\langle \mathcal{L}_T^{-1} \rangle = \ln(T_{l/r}) / \mathcal{L}_S \quad .$$

$\mathcal{L}_T^{-1}$ kann auch interpretiert werden als 'freie Weglänge der Elektronen bezogen auf die Temperaturabfalllänge'.

Fig. 3.2.8. ,Fig. 3.2.9. ,Fig. 3.2.10. enthalten Konvergenzstudien. Jedes Bild bezieht sich auf ein festes System. Die Punktescharen geben jeweils die Variation von Q_{red} und $\mathcal{L}_T^{-1}$ über den freien Bereich wieder.

Der Inhalt der Bilder lässt sich in folgenden Worten wiedergeben:

- Q_{red} fällt mit zunehmendem $\mathcal{L}_T^{-1}$ ab (Flußhemmung). Denn mit wachsender freier Weglänge verliert die von Spitzer³ implizierte Verteilungsfunktion mehr und mehr ihren positiv-definiten Charakter, was eine Überschätzung des tatsächlichen Wärme fluxes zur Folge hat. In der Gegenrichtung, also wenn die freie Weglänge der Elektronen *klein* wird gegen die Temperaturabfalllänge, rückt Q_e dem Spitzer-Wert immer näher (Fig. 3.2.5. ,Fig. 3.2.6.). Dieses Verhalten entspricht den Erwartungen. Im stark stoßbehafteten Regime soll der Wärme flux Q_e in den Spitzer-Fluß Q_{SH} übergehen.
- Mit grösser werdendem $\mathcal{L}_T^{-1}$ variiert Q_{red} immer stärker beim Durchlaufen des quellfreien Bereichs (Fig. 3.2.5. ,Fig. 3.2.6.). Darin kommt die zunehmende Nichtlokalität des Wärmetransports zum Ausdruck.
- Stösst man die Elektronen nur an *isotropen* Feldteilchen, *verringert* sich Q_{red} . Dann stimmen die Ergebnisse ziemlich gut mit [Matte]¹³ überein (Fig. 3.2.1. ,Fig. 3.2.2.). In diesem Fall tragen die Feldteilchen keinen Wärmestrom, was durch den Elektron-Elektron-Stoßoperator auch die Wärmeleitung der Testteilchen hemmt.
- Stehen beide Bäder unter dem selben Druck, ist Q_{red} höher als wenn sich ihre Dichten gleichen (Fig. 3.2.7.). Für $T_{l/r} = 2/1, \mathcal{L}_S = 1$ stellen Fig. 3.2.11. ,Fig. 3.2.12. ,Fig. 3.2.13. ,Fig. 3.2.14. beide Varianten nochmal genauer einander gegenüber. Das zur Kompensation des elektrischen Stroms erforderliche Gegenfeld ϵ ist bei konstanter *Dichte* viel *höher*, denn es kommt noch die stromtreibende Wirkung des Druckgefälles hinzu (vgl. 4.6.2.).
- Fig. 3.2.8. vergleicht 2 Rechnungen mit unterschiedlicher Ortsschrittweite $h = \lambda, \frac{1}{2}\lambda$ anhand des Systems $T_{l/r} = 2/1, \mathcal{L}_S = 16\lambda$. Die Übereinstimmung ist gut.
- Die Abhängigkeit der Lösung von n_{max} wird in Fig. 3.2.9. ,Fig. 3.2.4. ,Fig. 3.2.10. untersucht. Fig. 3.2.9. ,Fig. 3.2.4. lassen erkennen, daß die Konvergenz bei höherem $\mathcal{L}_T^{-1}$ schlechter wird. Man benötigt dann höhere n -Werte.

- In Fig. 3.2.9., Fig. 3.2.10. ist der Einfluß von l_{max} und n_{max} auf das Ergebnis am Beispiel des Systems $T_{l/r} = 2/1, \mathcal{L}_S = 4\lambda$ noch detaillierter dargestellt. Abschneiden in l ist nicht so kritisch wie in n . Diese Beobachtung teilen wir mit [Luciani]¹⁴.

Beispielhaft für alle Rechnungen dieses Abschnitts wird in Fig. 3.2.15. die Ortsabhängigkeit der Elektronenenergiequelle anhand der Situation $T_{l/r} = 2/1, \mathcal{L}_S = 1$ gezeigt. Aufgetragen ist S (Gl. A 6.10) gegen x . Die 1λ lange freie Zone ist von jeweils $\frac{1}{2}\lambda$ langen Bädern umgeben. Man sieht, daß im linken heißen Bad Energie hervorquillt, welche über die quellfreie Strecke ins kalte Bad fließt, um dort zu versickern. In der Tat sind linke und rechte Seite von (Gl. A 6.10) aufgetragen, fallen aber in einer Kurve zusammen. Die Energie ist also gut erhalten.

4.4. VERGLEICH MIT SPITZER-TEILCHENFLUSS UND RUN-AWAY

Wir wollen untersuchen, welchen Strom ein elektrisches Feld im Lorentzgas induziert. Dazu nehmen wir ein *homogenes*, 10λ langes Stück Plasma, zwischen dessen Enden eine Spannung anliegt. Die Ionen seien unendlich massiv und ruhend. Das ganze System steht in Kontakt mit einem Wärmebad, welches die vom E -Feld am Plasma geleistete Arbeit ständig abführt, so daß die Temperatur unverändert bleibt. Das E -Feld wird 'durchgestimmt' und der Quotient

$$J_{red} = J_e / J_{SH}$$

im stationären Gleichgewicht dagegen aufgetragen.

$$J_{SH}$$

bezeichnet den Spitzer-Strom (6.8.). Fig. 4.1. zeigt das Ergebnis. Mit abnehmendem $\epsilon = E/\xi$ stellt sich J_{red} ziemlich genau bei 1 ein. Bei kleinen Feldern liefert die Spitzer-Theorie also eine adequate Beschreibung. Zunehmendes ϵ bewirkt zunächst eine leichte Verminderung von J_{red} . Diese den elektrischen Strom betreffende Erscheinung ist analog zur 'Flußhemmung' des Wärmestroms (4.3.2.) Bei einer *kritischen* Feldstärke von ca. $\epsilon_{krit} = 0.4$ setzt *run-away* ein. Dann gibt es *keine* stationären Zustände mehr. ξ heißt *Dreicer-Feld*^{9,10}. Bei einem Abschneideparameter von $n_{max} = 4$ beträgt das kritische Feld somit 40% des Dreicer-Feldes. Bei Tanenbaum¹² beläuft sich ϵ_{krit} in der niedrigsten Momentennäherung auf 0.57ξ . Vermutlich geht ϵ_{krit} für $n_{max} \rightarrow \infty$ gegen 0, weil es bei jeder noch so kleinen Feldstärke eine wenn auch geringe Zahl von Elektronen gibt, die schnell genug sind, um den in der Einleitung beschriebenen

Lawineneffekt auszulösen. Fig. 4.2. und Fig. 4.3. zeigen das Zeitverhalten von Q_e , J_e für

- $\epsilon = 0.1$ (unterkritisch) bzw.

- $\epsilon = 0.4$ (kritisch).

Beim kritischen Wert gewinnt die beschleunigende Wirkung des elektrischen Feldes die Oberhand gegenüber der abbremsenden Wirkung der Stöße. Weil der Stoßquerschnitt abnimmt mit der 4. Potenz der Relativgeschwindigkeit, werden suprathermische Elektronen mit zunehmender Geschwindigkeit immer weniger von Stößen mit den bulk-Elektronen zurückgehalten, wodurch ihre Geschwindigkeit weiter zunimmt. Das Ergebnis ist ein lawinenartiges Anwachsen des Stroms. Run-away macht sich zuerst im Davonlaufen des Wärmestroms bemerkbar, weil ein mit Geschwindigkeit v fliegendes Elektron $\sim v^2$ -mal mehr zum Wärme- als zum Teilchenstrom beiträgt.

Zurück zu Fig. 4.1. . Lässt man die Elektronen nur mit ihrem maxwellschen (M) bzw. isotropen (I) Anteil wechselwirken, reduziert sich der Teilchenfluß. Diese Beobachtung steht in völliger Analogie zu dem entsprechenden Phänomen beim Wärmefluß†.

Eine selbststoßfreie Rechnung ($n_{max} = 1$) wurde mit '1' markiert. Die Übereinstimmung mit dem zugeordneten Spitzer-Wert ist sehr gut. Für $n_{max} > 1$ sind die selbststoßfreien Szenarien grundsätzlich divergent (4.5.).

4.5. SELBSTSTOSSFREIE RECHNUNGEN

Wir betrachten ein Lorentzgas. Die Ionen sind also ortsfest.

Schaltet man die Selbststöße der Elektronen ab, dann gibt es keine Kraft mehr, welche die Elektronenverteilung auf maxwellsche Gestalt zurückzutreiben sucht (Boltzmanns H-Theorem). Die Elektronen bewegen sich frei, bis auf Kollisionen mit den ruhenden Ionen. Unter diesen Umständen behält jedes Elektron für sich genommen seine Energie bei, weshalb Thermalisierung ausgeschlossen ist. Das verträgt sich nicht gut mit dem zugrunde liegenden Ansatz, wonach die Elektronenverteilung in eine Reihe entwickelt wird, deren erstes Glied einer Maxwellverteilung entspricht. Demnach wird die Konvergenz der Entwicklung schlechter mit zunehmender Abweichung vom maxwellschen Ursprung. Der Code eignet sich also nicht zum Studium selbststoßfreier Szenarien. Trotzdem wollen wir untersuchen, in wie weit er in der Lage ist, die von Spitzer⁸ angegebenen Werte für Wärme - und Teilchenfluß im selbststoßfreien Lorentzgas (6.8.)

†vgl. 4.3.1.

zu reproduzieren.

Zunächst geht die Konvergenz in der Zeit tatsächlich verloren, was die freie Elektronenbewegung widerspiegelt. Das Zeitverhalten dieser divergierenden Lösungen ist in *Fig. 5.2.*, *Fig. 5.4.* aufgemalt. Limitiert man jedoch die Burnett-Entwicklung bei $n_{max} = 1$, wird die Verteilungsfunktion auf wenige Freiheitsgrade 'eingezwängt' und die Konvergenz wieder hergestellt. Die stationären Zustände können dann mit den Angaben von Spitzer verglichen werden. Dies ist in *Fig. 5.1.*, *Fig. 5.3.* geschehen. Man sieht sehr gute Übereinstimmung für den durch ein elektrisches Feld getriebenen Teilchenstrom (*Fig. 5.1.*). Dagegen steht eine grosse Diskrepanz beim Temperaturgradient-getriebenen teilchenstromlosen Wärmestrom (*Fig. 5.3.*). Es ist indes zweifelhaft, ob dieser Fall überhaupt physikalischen Sinn macht, denn die Begriffe 'Stoßfreiheit' und 'Temperatur' schliessen einander aus. Je weniger Stösse ein einzelnes Teilchen erleidet, desto genauer ist seine Energie definiert. Einzelteilchenenergie und Temperatur genügen aber einer 'Unschärferelation'²².

4.6. WARME BEWEGLICHE IONEN

4.6.1. DIE ASYMMETRIE DES MODELLS BEI MASSENVERHÄLTNIS 1:1

Zur Explikation der dem Modell innewohnenden Asymmetrie in der Behandlung der beiden Spezies wählt man am besten $m_e/m_p = 1$, da in diesem Fall die Ionen bis auf das Ladungsvorzeichen mit den Elektronen *physikalisch* übereinstimmen.

Bei der Darlegung des Modells wurde darauf hingewiesen, daß die Ionen-Verteilungsfunktion auf eine bewegliche Maxwell-Verteilung eingeschränkt ist. Deshalb besitzen die Ionen im Gegensatz zu den Elektronen keine Wärmeleitung. Sie können Energie lediglich durch Konvektion transportieren.

In *Fig. 6.1.1.* ist die zeitliche Entwicklung der Teilchen- und Energieströme beider Spezies unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes aufgezeichnet. Wiederum sorgen Engiesenken für die Stationarität des Energieinhalts.

Man sieht, daß die zu den Teilchenströmen gehörenden elektrischen Ströme identisch sind, was ein Ausdruck der Impulserhaltung ist. Dagegen liegt der Betrag des Elektronen-Energiestroms gerade um den Wärmeleitungsanteil über dem der Ionen.

Fig. 6.1.2. zeigt die selbe Rechnung für $m_e/m_p = 0.1$. In diesem Fall stehen die elektrischen Ströme wegen Impulserhaltung zueinander wie 10/1. Auch braucht es jetzt wegen der grösseren Trägheit länger bis zum Erreichen des Gleichgewichts.

4.6.2. DRUCKGETRIEBENE KONVEKTIONSDOMINIERTE STRÖME

Die einzige Kraft, welche in unserem System einem Druckgefälle die Waage hält, ist die Trägheit. Rückt daher die Ionenmasse in die Nähe der Elektronenmasse, wird das System so leicht, daß bereits kleine Druckunterschiede zu hohen Massenströmungen Anlaß geben.

Wir teilen das System wieder in 2 Bäder und einen dazwischen liegenden freien Bereich ein. Jetzt befinden sich auch *Teilchenquellen* in den Bädern, so daß dort Energie- und Teilchendichten, also auch der Druck, räumlich wie zeitlich konstant sind.

Ein Druckgefälle zwischen den Bädern läßt sich auf zweierlei Weisen realisieren, nämlich durch einen Unterschied in den Baddichten oder in den Badtemperaturen.

Ersteres ist in *Fig. 6.2.1.* geschehen. Die Dichtevariation beträgt $\frac{1}{2}\%$ über 6 freie Weglängen. Gezeigt wird die Ortsabhängigkeit der Grössen T_e, T_r, p_e, p_p, ρ im stationären Endzustand. In *Fig. 6.2.3.* sind Q_e, Q_p , die Geschwindigkeit der strömenden Masse w und das elektrische Feld ϵ gegen x aufgetragen. ϵ sorgt für die Erfüllung der Bedingung $J \equiv J_e + J_p = 0$; mit anderen Worten: es soll *kein* elektrischer Strom fließen. Dies wird in *Fig. 6.2.5.* deutlich, welche das Zeitverhalten von Q_e, Q_p, J_e, J_p illustriert.

Bemerkenswert erscheinen folgende Punkte:

- Der mittlere Druck $p \equiv (p_e + p_p)/2$ ist in der freien Zone praktisch konstant. An den Rändern springt er etwa zu gleichen Teilen. Das läßt sich verstehen anhand einfacher Gasdynamik. Den stationären gasdynamischen Gleichungen entnimmt man nämlich, daß die Ortsableitung des totalen Drucks in quellfreien Gebieten verschwindet.
- Die Wärmeströme beider Spezies sind nahezu identisch; der Konduktionsanteil des Wärmestroms der Elektronen verschwindet also gemessen an dessen konvektiver Komponente.

Zum Vergleich sind 2 weitere Szenarien in den Serien *Fig. 6.2.2.*, *Fig. 6.2.4.*, *Fig. 6.2.6.* bzw. *Fig. 6.2.7.*, *Fig. 6.2.8.*, *Fig. 6.2.9.* wiedergegeben. Im ersten Fall wird der gewünschte $\frac{1}{2}\%$ -ige Druckabfall mittels einer Temperaturvariation erzielt, und im zweiten ist zusätzlich das Massenverhältnis $m_r^{-1} = m_p/m_e$ von 1 auf 10 hochgesetzt worden. Das bedeutet vor allem eine grössere Trägheit des Systems, weshalb der stationäre Zustand später erreicht wird. Ausserdem sind Massen- und Energieströme gegenüber der $m_r = 1$ - Situation abgesenkt.

4.6.3. TEMPERATURAUSGLEICH ZWISCHEN ELEKTRONEN UND IONEN

Nach [Braginskii]⁶ ist die Ausgleichszeit τ_{ep} zwischen 2 Spezies verschiedener Temperatur proportional zum Verhältnis ihrer Massen :

$$\tau_{ep} \propto \frac{m_p}{m_e} . \quad (4.3)$$

Zunächst seien die Massen gleich ($m_e = m_p$), beide Sorten also *physikalisch* identisch. Das Verhältnis der Temperaturen betrage zu Beginn der Rechnung $T_p/T_e = 1.2/1$. Fig. 6.3.1. zeigt die Evolution von U_e, U_p und der totalen Energie $U = U_e + U_p$. Startet man mit $T_p/T_e = 0.8/1$, ergibt sich Fig. 6.3.2. .

In Fig. 6.3.3. ist $m_p/m_e = 5.0/0.5$; ausgegangen wurde von $T_p/T_e = 2/1$.

Hervorzuheben ist

- die Energien beider Spezies U_e, U_p gleichen sich erwartungsgemäß an .
- die Gesamtenergie U bleibt erhalten.
- die Relaxationszeiten τ_{ep} in Fig. 6.3.2. und Fig. 6.3.3. verhalten sich zueinander wie 1/10 im Einklang mit Gl. (3).

Um am Beispiel von Fig. 6.3.3. zu klären, in welchem Ausmaß Rechenungenauigkeiten den maxwellischen Charakter der Elektronen-Verteilungsfunktion im thermischen Gleichgewicht zerstören, konsultiere man Fig. 6.3.4. . Darin ist der Logarithmus von $f_e^N = f_e/f_e^M$ (Appendix 6.6.) im stationären Endzustand als Funktion von $v_x, v_\perp$ aufgetragen. Die Abweichung von der zugeordneten Maxwellverteilung f_e^M wächst mit dem Betrag $v = \sqrt{v_x^2 + v_\perp^2}$ der Elektronen-Geschwindigkeit. Wie man dem Bild entnimmt, beträgt der Unterschied bei $v = 3v_{th}$ unter $(1 - e^{-0.1}) \times 100\% = 9.5\%$. Das wellenförmige Muster weist die Signatur der radialen Laguerre-Polynome aus den Burnettfunktionen auf. In diesem Beispiel wird deutlich, daß die Güte der Wiedergabe der Verteilungsfunktion durch Burnettfunktionen mit zunehmender Elektronen-Geschwindigkeit v nachläßt.

4.7. STUDIUM DER VERTEILUNGSFUNKTION

Gegenstand dieses Abschnitts ist die Frage: In welcher Weise deformieren Gradienten und Felder die Geschwindigkeitsverteilung f_e der Elektronen?

Die ausgewählten Bilder entstammen bis auf Zahlenfaktoren den vorangegangenen Rechnungen dieses Kapitels.

Zunächst setzen wir f_e einem $\underline{E}$ -Feld aus (vgl. 4.4.). Temperatur und Dichte seien *homogen*. Energiesenken stellen überdies die Zeitunabhängigkeit der Temperatur sicher.

In Fig. 7.1. ist das Zeitverhalten von $f_e^N = f_e/f_e^M$ (vgl. A 6.6.) dargestellt. Die Elektronen fliegen im *positiven* $\underline{E}$ -Feld ($\epsilon = 0.1$) nach *links*. Deshalb enthält die *linke* Hälfte der Geschwindigkeitsverteilung einen Elektronenüberschuss gemessen an der zugeordneten Maxwellverteilung f_e^M . Auf der rechten Seite ist es umgekehrt.

In Fig. 7.2. ist f_e^N gegen $v_x, v_\perp$ im Gleichgewicht aufgetragen. Man erkennt ein 'Plateau' bei $f_e^N = 1$. An den Rändern fällt wieder die Asymmetrie aus Fig. 7.1. ins Auge.

Zum Vergleich ist in Fig. 7.3. eine selbstossfreie Rechnung wiedergegeben (vgl. 4.4.). Sie konvergiert erwartungsgemäß *nicht*, denn die der Deformation durch das $\underline{E}$ -Feld entgegengerichtete Wirkung der Stöße entfällt. Die wellenförmige Struktur ist eine sich aufschaukelnde Burnett-Komponente. Abschneiden bei $n_{max} = 1$ stellt die Konvergenz wieder her (Fig. 7.4., Fig. 7.2.) und liefert gute Übereinstimmung mit dem entsprechenden Spitzer-Wert (Fig. 4.1.).

Gegeben seien nun 2 jeweils 4λ lange Bäder und ein 16λ langes quellenfreies Verbindungsstück (vgl. 4.3.2.). Die Badtemperaturen verhalten sich zueinander wie 2:1. Die Dichte sei zunächst homogen. Im stationären Gleichgewicht strömt Wärme vom heißen ins kalte Bad. Ein elektrisches Gegenfeld wirkt so, daß kein elektrischer Strom fließt. Fig. 7.6. zeigt, wie die Verteilungsfunktion vom Ort abhängt. Nach rechts ist v_x aufgetragen, nach hinten x und nach oben $\log f_e^N$. Im Vordergrund befindet sich das heiße Bad. Anschließend folgt die längere quellenfreie Passage, die hinten ins kalte Bad einmündet. Wie man der Figur entnimmt, sinkt im heißen Bad bei großen Geschwindigkeiten die Phasenraumdichte vorwärts-rückwärts-symmetrisch unter den zugeordneten maxwellischen Wert f_e^M ab. Im kalten Bad ist es genau umgekehrt: Dort geht die Phasenraumdichte für große Vorwärts- und Rückwärtsgeschwindigkeiten über den maxwellischen Wert hinaus. Das erlaubt folgende Deutung:

Der Stoßquerschnitt der Elektronen nimmt ab mit der 4. Potenz der Relativgeschwindigkeit. *Schnelle* Elektronen bewegen sich also nahezu stoßfrei. Deshalb passieren sie ungehindert die Verbindungsstrecke zwischen den Bädern und sammeln sich bevorzugt im kalten Bad. Dieser Überschuß heißer Elektronen im kalten Bad heißt 'pre heat'. Entsprechend gibt es einen *Mangel* heißer Elektronen im *heissen* Bad. Im Zwischenbereich fällt die vorwärts-rückwärts-Asymmetrie ins Auge, die für den nach vorne gerichteten Wärmestrom verantwortlich ist. Dabei fließt *kein* Netto-Teilchenstrom.

Diese Asymmetrie setzt sich in die Badzonen hinein fort, wie man aus dem Verlauf des Wärmestroms in Fig. 1.9. (4.1.) ersieht ('preheat'). Sie ist aber durch den nicht thermalisierten *isotropen* Anteil der Verteilungsfunktion überlagert und deshalb in Fig. 7.6. nicht erkennbar. Im Übrigen ist das Aussehen der Verteilungsfunktion in den Bädern stark geprägt von der Struktur der Quellen bzw. Senken, welche in unserer Arbeit auf die Burnett-Entwicklungsfunktionen abgestimmt sind: Um z.B. die Energiedichte konstant zu halten, wird lediglich c_{01} nach jeder Iteration auf 0 zurückgesetzt (vgl. 3.2.).

In Fig. 7.7. ist der *Druck* homogen. Die Dichte steigt also zum kalten Bad hin an und erreicht dort den doppelten Wert, weil die Temperatur um die Hälfte abgenommen hat. 'Pre heat' ist nun aus dem $3v_{th}$ -Fenster fast verschwunden; denn die mittlere freie Weglänge im kalten Bereich ist wegen der höheren Dichte zurückgegangen, wodurch auch die *heissen* Elektronen besser thermalisieren. Fig. 7.8. zeigt $\log f_e^N$, aufgetragen gegen v_x (nach rechts) und $v_\perp$ (nach hinten), in der Mitte des freien Bereichs. Man sieht wieder das 'maxwellsche' Plateau bei 0 und die den Wärmestrom tragende asymmetrische Verbiegung des 'Tellerrandes'. Fig. 7.9. enthält dieselbe Funktion als Kontourplot.

Bei der Auswahl der brauchbarsten Darstellungsweise fiel die Entscheidung zugunsten der normierten Verteilung f_e^N (A6.6.). Trägt man nämlich f_e direkt auf, läßt sich mit bloßem Auge meistens keine Abweichung von der maxwellschen Form ausmachen. Die Darstellung von f_e^N mag allerdings den Eindruck erwecken, daß die Verteilungsfunktion bei großen Geschwindigkeiten unvernünftige Werte annimmt. Deshalb ist noch in Fig. 7.10. f_e aus Fig. 7.8. direkt aufgetragen. Man sieht die Ähnlichkeit mit der maxwellschen 'Glocke'.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben die Fokker-Planck-Gleichung für Elektronen und Ionen im Bereich starker Temperatur- und Dichteinhomogenitäten, wie sie in der Randschicht auftreten, entlang magnetischer Feldlinien numerisch gelöst. Die Ionen treten im Modell als bewegliche Maxwell-Verteilungen in Erscheinung. Sie besitzen also keine konduktive Wärmeleitung, da diese auf einer anisotropen Deformation der Verteilungsfunktion beruht. Mit dieser Einschränkung wurden alle Stoßoperatoren, inclusive die Elektron-Elektron-Wechselwirkung, exakt ausgewertet. Der Code ist in der Lage Zeit-Szenarien bis zu mehreren hundert Stoßzeiten binnen weniger CPU-Minuten durchzurechnen. Die Verteilungsfunktion der Elektronen wird dargestellt durch die Koeffizienten einer Reihenentwicklung in den sogenannten Burnettfunktionen, deren erstes Glied einer Maxwellverteilung entspricht. Die Entwicklung konvergiert also umso besser, je geringer die Abweichung von der maxwellschen Form, mit anderen Worten je stoßbehafteter das Plasma ist. Der Code eignet sich demnach besonders für Anwendungen in dem für die Randschicht charakteristischen Übergangsbereich zwischen stark - und schwach stoßbehaftetem Regime.

Die Ergebnisse bestätigen qualitativ Phänomene wie 'Flußhemmung' oder 'preheat', wie sie bereits in früheren Arbeiten mit Hilfe simplifizierter Versionen des Stoßoperators gefunden wurden. Zum Zweck einer *quantitativen* Beschreibung erscheint jedoch die hier praktizierte symmetrische Behandlung von Test- und Feldteilchen im Stoßoperator unabdingbar, weil die lokalen, symmetrischen Ergebnisse von Spitzer zum Teil die Wirklichkeit besser wiedergeben, als 'unsymmetrische' Fokker-Planck-Rechnungen (vgl. Fig. 4.1.).

Es wurde auch der zeitliche Ablauf von Elektronen-run-away im elektrischen Feld simuliert. Dabei stellte sich heraus, daß run-away auftritt, sobald das elektrische Feld einen gewissen Schwellwert (kritisches Feld) überschreitet. Dann existiert kein stationärer Zustand mehr; Wärme- und Teilchenströme divergieren (4.4.).

Um die ungleiche Behandlung von Elektronen und Ionen in unserem Modell zu verdeutlichen (die Verteilungsfunktion der Elektronen ist im Gegensatz zu der der Ionen deformierbar und kann daher *konduktiv* Wärme transportieren), wurden Rechnungen mit Massenverhältnis 1:1 durchgeführt. Durch ein Druckgefälle wurden konvektionsdominierte Ströme hervorgerufen, deren konduktiver Anteil gegenüber dem Transport durch Konvektion nicht ins Gewicht fiel. In dieser Situation verhielten sich beide Spezies erwartungsgemäß gleich, da hier die Modell-Asymmetrie zwischen Elektronen und

Ionen nicht zum Tragen kam. Hingegen war ein deutlicher Unterschied zu verzeichnen, wenn man beide Spezies einem elektrischen Feld aussetzte. Während ihre Beiträge zum elektrischen Strom gleich groß waren, lag der Energiestrom der Elektronen gerade um den konduktiven Anteil über dem der Ionen (4.6.).

Nicht voll ausgeschöpft wurden die Möglichkeiten des Programms beim Studium des *Lorentzgases* (ortsfeste Ionen). In diesem Spezialfall geht der *Ladevorgang* (3.3.,3.4.) besonders effizient vonstatten. Das eröffnet die Möglichkeit, ca. 40 Burnettkoeffizienten zur Darstellung der Elektronen-Verteilungsfunktion heranzuziehen, anstatt wie bisher nur 20, ohne die Rechenzeitgrenzen zu sprengen. Dadurch lassen sich auch die Grenzen des Anwendungsbereichs in Richtung noch kleinerer Temperaturabfallängen hinausschieben, was aber die qualitativen Aussagen aus 4.3. unberührt lassen sollte.

6. Appendix A : Begriffsbildungen

6.1. KONVENTIONEN

Unterstrichene Grössen sind stets *dimensionsbehaftet* (CGS-System). *Nicht* unterstrichene Grössen sind *dimensionslos*, mit Ausnahme von m_e, m_p, e . Manche dimensionslose Grössen erscheinen in 2 Schriftbildern, z.B. w und $\underline{w}$. Dann ist w das Ergebnis der Messung der *dimensionsbehafteten* Grösse $\underline{w}$ mit einem *ortsabhängigen* Maßstab $[v_{th}(x)\underline{v}_{th}]$, während sich $\underline{w}$ auf eine *ortsunabhängige* Skala $[\underline{v}_{th}]$ bezieht (vgl. A 6.6.).

Das Summenzeichen Σ wird in Appendix B der Übersichtlichkeit halber oft fortgelassen. Falls ein Index nur auf *einer* Seite der betreffenden Gleichung auftaucht, wird über diesen selbstverständlich summiert.

Die partielle Ableitung einer Grösse nach der dimensionslosen Zeit t wird mit einem Punkt angedeutet, z.B. $\dot{w}$, die partielle Ableitung nach dem Ort x mit einem Strich, z.B. w' .

6.2. DEFINITIONEN

*Das Namen-Lose ist der Ursprung von Himmel und Erde,
Das Namen-Geben ist die Mutter der zehntausend Dinge.*

Lao-Tse

λ	eine absolute freie Weglänge [cm]
$\underline{x} = x \cdot \lambda$	physikalischer Ort
$\underline{t}$	eine absolute Stosszeit [s]
$\underline{t} = t \cdot \underline{t}$	physikalische Zeit
$\underline{v}_{th} = \frac{\lambda}{\underline{t}}$	zugehörige thermische Geschwindigkeit $[\frac{cm}{s}]$
e	positive Elementarladung [statcoulomb]
m_e	Elektronenmasse [g]

m_p	Ionenmasse (Protonen) [g]
m_r	$\frac{m_e}{m_p}$
$\underline{\rho} = \frac{m_e^2 v_{th}^3}{4 \lambda e^4 \underline{I}}$	zugehörige Teilchendichte
$\rho_e(t, x) \cdot \underline{\rho}$	lokale Elektronendichte
$\rho_p(t, x) \cdot \underline{\rho} = \rho(t, x) \cdot \underline{\rho}$	lokale Ionendichte
$\underline{\xi} = \frac{m_e}{e} \frac{v_{th}}{\underline{I}}$	zugeordnetes elektrische Feld $\left\{ \frac{\text{statvolt}}{\text{cm}} \right\}$
$\underline{E}(t, x) = \epsilon(t, x) \cdot \underline{\xi} =$ $\epsilon(t, x) \cdot v_{th}(x) \cdot \underline{\xi}$	lokale elektrische Feldstärke
$\bar{v}_{th}(t, x) \cdot \underline{v}_{th}$	lokale thermische Geschwindigkeit der Elektronen
$T_e(t, x) = \bar{v}_{th}^2(t, x)$	Elektronentemperatur
$p_e = \rho_e T_e$	Elektronen-Partialdruck
$v_{th}(x) \cdot \underline{v}_{th}$	lokale Skala der Elektronen-Geschwindigkeit
$T_B(x) = v_{th}^2(x)$	Basistemperatur der Elektronen
$\bar{\underline{v}} = \bar{\underline{v}} \cdot v_{th}(x) \cdot \underline{v}_{th}$	Elektronen-Geschwindigkeit im Laborsystem
$\bar{\underline{u}} = \bar{\underline{u}} \cdot v_{th}(x) \cdot \underline{v}_{th}$	Elektronen-Geschwindigkeit im Ruhssystem der Ionen

$\vec{w}(t, x) \cdot v_{th}(x) \cdot \underline{v}_{th} =$ $\vec{w}(t, x) \cdot \underline{v}_{th} = \vec{w}(t, x)$	lokale Schwerpunktschwindigkeit der Ionen
w_p	$w/\sqrt{m_r}$
$w_{th}(t, x) \cdot v_{th}(x) \cdot \underline{v}_{th} =$ $w_{th}(t, x) \cdot \underline{v}_{th} = \underline{w}_{th}(t, x)$	lokale thermische Geschwindigkeit der Ionen
$T_p(t, x) = w_{th}^2(t, x)/m_r$	Ionentemperatur
$p_p = \rho_p T_p$	Ionen-Partialdruck
$\vec{\tilde{v}} = \vec{v} / \underline{w}_{th}(t, x)$	Elektronen-Geschwindigkeit im <i>Laborsystem</i> gemessen an der thermischen Geschwindigkeit der Ionen
$\vec{\tilde{u}} = \vec{u} / \underline{w}_{th}(t, x)$	Elektronen-Geschwindigkeit im <i>Ionensystem</i> gemessen an der thermischen Geschwindigkeit der Ionen
$\vec{\tilde{w}} = \vec{w} / \underline{w}_{th}(t, x)$	Ionen-Schwerpunktschwindigkeit gemessen an der thermischen Geschwindigkeit der Ionen

6.3. BURNETT-FUNKTIONEN

Die Burnettfunktionen⁵ $B_{ln}(\vec{u})$; $l, n \geq 0$ stellen ein *vollständiges, orthogonales* Funktionensystem in $u, \mu = \frac{u_x}{u} = \cos \theta$ dar.

$$B_{ln}(\vec{u}) = P_l(\mu) u^l L_n^{l+\frac{1}{2}}(u^2); \quad \mu = \frac{u_x}{u}, \quad l, n \geq 0.$$

P_l sind *Legendrepolynome*, L_n^α verallgemeinerte *Laguerrepolynome*²³.

Die *Orthogonalitätsrelation* der B_{ln} lautet :

$$\int d\vec{u} B_{ln}(\vec{u}) B_{l'n'}(\vec{u}) e^{-u^2} = \delta_{ll'} \delta_{nn'} \cdot h_{ln},$$

wobei

$$h_{ln} = \frac{2\pi}{2l+1} \frac{\Gamma(n+l+\frac{3}{2})}{n!} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{2l+1} \frac{(n+l+\frac{1}{2})!}{n!}.$$

6.4. ELEKTRONEN-VERTEILUNGSFUNKTION

Die Elektronen-Verteilungsfunktion $\underline{f}_e$ wird nach Burnettfunktionen zerlegt:

$$\underline{f}_e(t, x, \vec{u}) = \sum_{l, n \geq 0} \underline{c}_{ln}(t, x) B_{ln}(\vec{u}) e^{-u^2}.$$

Um sie auf dimensionslose Form zu bringen, definieren wir

$$c_{ln}(t, x) = \underline{c}_{ln}(t, x) \cdot \mathcal{N}_e^{-1}(x),$$

wobei

$$\mathcal{N}_e(x) \equiv \frac{\rho}{\pi^{\frac{3}{2}} v_{th}^3 v_{th}^3(x)}.$$

Das induziert die Schreibweise

$$f_e(t, x, \vec{u}) = \mathcal{N}_e^{-1}(x) \cdot \underline{f}_e(t, x, \vec{u}) = \sum_{l, n \geq 0} c_{ln}(t, x) B_{ln}(\vec{u}) e^{-u^2}.$$

6.5. IONEN-VERTEILUNGSFUNKTION

Die Ionen sind voraussetzungsgemäß nach *Maxwell* verteilt, demnach lautet die Ionen-Verteilungsfunktion

$$\underline{f}_p(t, x, \vec{u}) = \rho(t, x) \rho \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} w_{th}^3(t, x)} e^{-\left(\frac{u}{w_{th}(t, x)}\right)^2}$$

Wir schreiben sie gleichfalls dimensionslos als

$$f_p(t, x, \vec{u}) = \underline{f}_p(t, x, \vec{u}) \cdot \mathcal{N}_p^{-1}(t, x) = \rho(t, x) e^{-\left(\frac{u}{w_{th}(t, x)}\right)^2}.$$

wobei

$$\mathcal{N}_p(t, x) \equiv \frac{\rho}{\pi^{\frac{3}{2}} w_{th}^3(t, x)}.$$

6.6. ABGELEITETE PHYSIKALISCHE GRÖSSEN

lokale Elektronen-Teilchendichte

$$\begin{aligned}\rho_e(t, x) \cdot \underline{\rho} &= \int d\vec{y} \, \underline{f}_e(t, x, \vec{y}) = \int d\vec{u} \, \underline{f}_e(t, x, \vec{u}) = \underline{v}_{th}^3 v_{th}^3(x) \int d\vec{u} \, \underline{f}_e(t, x, \vec{u}) \\ &= \pi^{\frac{3}{2}} \underline{v}_{th}^3 v_{th}^3(x) \cdot \underline{c}_{oo}(t, x) = \underline{\rho} \cdot c_{oo}(t, x),\end{aligned}$$

somit

$$\rho_e(t, x) = c_{oo}(t, x). \quad (6.1)$$

$c_{oo}(t, x)$ hat demnach die Bedeutung der Elektronenteilchendichte bezogen auf $\underline{\rho}$.

lokale Elektronen-Stromdichte:

$$\begin{aligned}\underline{J}_e(t, x) &= -e \int d\vec{u} \, \underline{f}_e(t, x, \vec{u}) \, \underline{v}_x \\ &= -e \, \underline{v}_{th}^4 v_{th}^4(x) \mathcal{N}_e(x) \int d\vec{u} \, f_e(t, x, \vec{u}) [w(t, x) + \mu u] \\ &= -e \, \underline{v}_{th}^4 v_{th}^4(x) \mathcal{N}_e(x) \cdot [w(t, x) c_{oo}(t, x) h_{oo} + c_{1o}(t, x) h_{1o}] \\ &= -e \underline{\rho} \underline{v}_{th} v_{th}(x) \cdot \left[w(t, x) c_{oo}(t, x) + \frac{c_{1o}(t, x)}{2} \right]\end{aligned}$$

Also ist

$$J_e(t, x) = -w(t, x) c_{oo}(t, x) - \frac{c_{1o}(t, x)}{2}$$

die lokale Elektronenstromdichte bezogen auf $e \underline{v}_{th} v_{th}(x)$. Dieses Maß hat den Nachteil, daß es ortsabhängig ist. Deshalb definieren wir

$$J_e(t, x) \equiv -v_{th}(x) \left(w(t, x) c_{oo}(t, x) + \frac{c_{1o}(t, x)}{2} \right), \quad (6.2)$$

was sich nun auf die ortsunabhängige Skala $e \underline{v}_{th}$ bezieht. Ausserdem ist

$$\langle v \rangle = w + \frac{c_{1o}}{2 c_{oo}}$$

die mittlere Elektronengeschwindigkeit gemessen an $v_{th}(x) \underline{v}_{th}$.

lokale Ionen-Stromdichte:

$$\begin{aligned}\underline{J}_p(t, x) &= e \int d\vec{u} \, \underline{f}_p(t, x, \vec{u}) \, \underline{v}_x \\ &= e \, \underline{w}_{th}^4(t, x) \mathcal{N}_p(t, x) \int d\vec{u} \, \underline{f}_p(\vec{u}) (\vec{w} + \mu \vec{u}) \\ &= e \frac{\underline{\rho}_{th}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \rho \, \vec{w} \, h_{oo} \\ &= e \underline{\rho} \underline{v}_{th} \, w \rho.\end{aligned}$$

Deshalb ist

$$J_p = w\rho \quad (6.3)$$

die lokale Stromdichte der Ionen in Einheiten von $e \rho v_{th}$.

lokale *Energiestromdichte* der Elektronen:

$$\begin{aligned} Q_e(t, x) &= \frac{m_e}{2} \int d\vec{v} \, \underline{f}_e(\vec{v}) \, v^2 v_x \\ &= \frac{m_e}{2} v_{th}^6 v_{th}^3 N_e \int d\vec{u} \, f_e(\vec{u}) \, (\vec{w} + \vec{u})^2 (w + \mu u) \\ &= \frac{m_e}{2} \rho v_{th}^3 v_{th}^3 \cdot \left[(w^3 + \frac{5}{2}w) c_{oo} - \frac{5}{2}w c_{o1} + (\frac{3}{2}w^2 + \frac{5}{4}) c_{1o} - \frac{5}{4}c_{11} + w c_{2o} \right]. \end{aligned}$$

Daher ist

$$Q_e = \frac{5}{4}(c_{1o} - c_{11}) + w \left[\frac{5}{2}(c_{oo} - c_{o1}) + c_{2o} \right] + w^2 \frac{3}{2}c_{1o} + w^3 c_{oo}$$

bzw.

$$Q_e = v_{th}^3 \left\{ \frac{5}{4}(c_{1o} - c_{11}) + w \left[\frac{5}{2}(c_{oo} - c_{o1}) + c_{2o} \right] + w^2 \frac{3}{2}c_{1o} + w^3 c_{oo} \right\} \quad (6.4)$$

die lokale *Energiestromdichte* der Elektronen gemessen an

$$\frac{m_e}{2} \rho v_{th}^3 v_{th}^3 \quad \text{bzw.} \quad \frac{m_e}{2} \rho v_{th}^3.$$

lokale *Energiestromdichte* der Ionen:

$$\begin{aligned} Q_p &= \frac{1}{2} m_p v_{th}^6(t, x) N_p(t, x) \int d\vec{u} \, \underline{f}_p(\vec{u}) \, (\vec{w} + \vec{u})^2 (w + \mu u) \\ &= \frac{1}{2} m_p \frac{\rho w_{th}^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} \rho \left(w^3 + \frac{5}{2}w \right) h_{oo} \\ &= \frac{1}{2} m_p \rho v_{th}^3 \left(w^3 + \frac{5}{2}w^2 w \right) \rho \\ &= \frac{1}{2} m_e \rho v_{th}^3 \sqrt{m_r} \left(w_p^3 + \frac{5}{2}T_p w_p \right) \rho. \end{aligned}$$

$$Q_p = \sqrt{m_r} \left(w_p^3 + \frac{5}{2}T_p w_p \right) \rho \quad (6.5)$$

ist somit die *Energiestromdichte* der Ionen in Bezug auf $\frac{1}{2} m_e \rho v_{th}^3$. Q_e und Q_p werden also mit dem selben Maß gemessenn, damit sie direkt vergleichbar sind.

lokale *Energiedichte* der Ionen:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_p &= \frac{1}{2} m_p \underline{w}_{th}^5 \int d\vec{u} \underline{f}_p(\vec{u}) (\vec{w} + \vec{u})^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_p \frac{\rho_{th}^2}{\pi^{\frac{3}{2}}} \rho \left(\vec{w}^2 + \frac{3}{2} \right) h_{oo} \\
 &= \frac{1}{2} m_p \rho_{th}^2 \left(w^2 + \frac{3}{2} w_{th}^2 \right) \rho \\
 &= \frac{1}{2} m_e \rho_{th}^2 \left(w_p^2 + \frac{3}{2} T_p \right) \rho .
 \end{aligned}$$

Daher ist

$$U_p = \left(w_p^2 + \frac{3}{2} T_p \right) \rho \quad (6.6)$$

die Energiedichte der Ionen in Bezug auf die Skala $\frac{m_e}{2} \rho_{th}^2$.

lokale *Energiedichte* der Elektronen:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_e(t, x) &= \frac{m_e}{2} \int d\vec{v} \underline{f}_e(t, x, \vec{v}) \underline{v}^2 \\
 &= \frac{m_e}{2} \underline{v}_{th}^5 v_{th}^5(x) \mathcal{N}_e(x) \int d\vec{u} f_e(t, x, \vec{u}) (\vec{w}(x) + \vec{u})^2 \\
 &= \frac{m_e}{2} \underline{v}_{th}^5 v_{th}^5 \mathcal{N}_e \int d\vec{u} f_e(\vec{u}) \left[w^2 + \frac{3}{2} + 2w B_{1o}(\vec{u}) - B_{o1}(\vec{u}) \right] \\
 &= \frac{m_e}{2} \rho_{th}^2 v_{th}^2 \cdot \left[\left(w^2 + \frac{3}{2} \right) c_{oo} + w c_{1o} - \frac{3}{2} c_{o1} \right]
 \end{aligned}$$

Demnach ist

$$U_e = \frac{3}{2} (c_{oo} - c_{o1}) + w c_{1o} + w^2 c_{oo}$$

bzw.

$$U_e = v_{th}^2 \left\{ \frac{3}{2} (c_{oo} - c_{o1}) + w c_{1o} + w^2 c_{oo} \right\} \quad (6.7)$$

die lokale Energiedichte der Elektronen bezogen auf

$$\frac{m_e}{2} \rho_{th}^2 v_{th}^2(x) \quad \text{bzw.} \quad \frac{m_e}{2} \rho_{th}^2 .$$

Aus Gl. (6) kann man direkt die thermische Geschwindigkeit $\tilde{v}_{th}$ der Elektronen ableiten, denn andererseits gilt falls $w = 0$

$$U_e = \frac{3}{2} \rho_e \tilde{v}_{th}^2 .$$

Vergleich ergibt (Gl. (1))

$$\tilde{v}_{th}(t, x) = v_{th}(x) \sqrt{1 - \frac{c_{o1}(t, x)}{c_{oo}(t, x)}} . \quad (6.8)$$

Mit Hilfe von $\tilde{v}_{th}$ kann man jedem f_e eine Maxwellverteilung f_e^M zuordnen, welche im Hinblick auf Teilchenzahl und innere Energie, sprich Temperatur, mit f_e übereinstimmt.

$$f_e^M(\vec{u}) = \rho \left(\frac{v_{th}}{\tilde{v}_{th}} \right)^3 e^{-\left(\frac{u}{\tilde{v}_{th}} \right)^2}.$$

Beim Studium der Verteilungsfunktion wird meistens auf f_e^M normiert :

$$f_e^N \equiv \frac{f_e}{f_e^M}.$$

Bei der Ableitung dieser Beziehungen kamen folgende Identitäten zum Einsatz:

$$1 = B_{00}(\vec{u})$$

$$\mu u = B_{10}(\vec{u})$$

$$(\vec{w} + \vec{u})^2 = \left(w^2 + \frac{3}{2} \right) B_{00} + 2w B_{10} - B_{01},$$

$$(\vec{w} + \vec{u})^2 (w + \mu u) = \left(w^3 + \frac{5}{2} w \right) B_{00} + \left(3w^2 + \frac{5}{2} \right) B_{10} - \frac{5}{3} w B_{01} - B_{11} + \frac{4}{3} w B_{20}.$$

6.7. ENERGIEERHALTUNGSSATZ

Hier sind noch einmal einige Beziehungen aus (6.6.) zusammengefaßt.

$$\underline{J}_e = e \underline{\rho} \underline{v}_{th} J_e$$

$$\underline{J}_p = e \underline{\rho} \underline{v}_{th} J_p$$

$$\underline{U}_e = \frac{1}{2} m_e \underline{\rho} \underline{v}_{th}^2 U_e$$

$$\underline{U}_p = \frac{1}{2} m_e \underline{\rho} \underline{v}_{th}^2 U_p$$

$$\underline{Q}_e = \frac{1}{2} m_e \underline{\rho} \underline{v}_{th}^3 Q_e$$

$$\underline{Q}_p = \frac{1}{2} m_e \underline{\rho} \underline{v}_{th}^3 Q_p$$

Der Energieerhaltungssatz für das Gesamtsystem lautet

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = - \frac{\partial \underline{Q}}{\partial x} + \underline{E} \cdot \underline{J} + \underline{S}, \quad \text{oder}$$

$$\underline{S} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{t}} + \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{x}} - \underline{E} \cdot \underline{J} , \quad (6.9)$$

wobei

$$\underline{U} \equiv U_e + U_p , \quad \underline{Q} \equiv Q_e + Q_p , \quad \underline{J} \equiv J_e + J_p .$$

$\underline{S}$ bedeutet eine Energiequelle.

Dimensionslos lautet Gl. (9)

$$\begin{aligned} S &\equiv \frac{\tau}{\frac{m_e}{2} \rho_{th}^2} \cdot \underline{S} \\ &= \frac{\tau}{\frac{m_e}{2} \rho_{th}^2} \cdot \left\{ \frac{\frac{m_e}{2} \rho_{th}^2}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (U_e + U_p) + \frac{\frac{m_e}{2} \rho_{th}^3}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} (Q_e + Q_p) - e \rho_{th} \epsilon \cdot (J_e + J_p) \right\} \\ &= \dot{U}_e + \dot{U}_p + Q'_e + Q'_p - 2 \epsilon \cdot (J_e + J_p) \\ &= \dot{U} + Q' - 2 \epsilon \cdot J . \end{aligned} \quad (6.10)$$

6.8. WÄRME- UND TEILCHENSTROM IM LORENTZGAS

Der Wärmestrom der Elektronen ist allgemein gegeben durch (Gl. (4))

$$Q_e = v_{th}^3 \left\{ \frac{5}{4} (c_{10} - c_{11}) + w \left[\frac{5}{2} (c_{00} - c_{01}) + c_{20} \right] + w^2 \frac{3}{2} c_{10} + w^3 c_{00} \right\}$$

Im Lorentzgas *ruhen* die Ionen, daher

$$Q_L = v_{th}^3 \frac{5}{4} (c_{10} - c_{11}) . \quad (6.11)$$

Auf der anderen Seite haben wir im *stromfreien, selbststossfreien* Fall nach Spitzer (Gl. (7))

$$\begin{aligned} Q_{SH} &= -\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{2m_e^3}{\Lambda e^4} \frac{v_{th}^7 \tilde{v}_{th}^7}{\lambda} \cdot \frac{(\tilde{v}_{th}^2)'}{\tilde{v}_{th}^2} \\ &= -\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{4m_e^3}{\Lambda e^4} \frac{v_{th}^7 \tilde{v}_{th}^6}{\lambda} \cdot \tilde{v}_{th}' , \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{v}_{th} = v_{th} \sqrt{1 - \frac{c_{01}}{c_{00}}} .$$

Diesen absoluten Wert beziehen wir noch auf unser Mass

$$\frac{m_e}{2} \rho_{th}^3 = \frac{m_e^3}{8 \Lambda e^4} \frac{v_{th}^7}{\lambda} .$$

Dann folgt

$$Q_{SH} = -32 \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \tilde{v}_{th}^6 \tilde{v}_{th}' . \quad (6.12)$$

Im selbststossbehafteten Fall muss dies nach Spitzer noch mit dem Faktor 0.225 abgedämpft werden.

Wir betrachten jetzt ein homogenes Plasma, worin ein elektrisches Feld wirkt. Der elektrische Strom ist allgemein gegeben durch (Gl. (2))

$$J_e(t, x) = -v_{th}(x) \left(w(t, x) c_{oo}(t, x) + \frac{c_{1o}(t, x)}{2} \right) .$$

Im Lorentzgas ruhen die Ionen und wir haben daher

$$J_L = -v_{th} \frac{c_{1o}}{2} . \quad (6.13)$$

Andererseits haben wir im selbststossfreien Fall nach Spitzer :

$$\begin{aligned} J_{SH} &= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{2m_e}{\Lambda e^2} \underline{v}_{th}^3 \tilde{v}_{th}^3 \cdot \underline{\epsilon} \epsilon \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{2m_e \underline{v}_{th}^3}{\Lambda e^2} \frac{4\Lambda e^3}{m_e \underline{v}_{th}^2} \underline{\rho} \tilde{v}_{th}^3 \epsilon \\ &= \frac{8}{\pi^{\frac{3}{2}}} \tilde{v}_{th}^3 \underline{v}_{th} \epsilon \underline{e} \underline{\rho} . \end{aligned}$$

Diesen absoluten Wert beziehen wir noch auf unser Mass

$$e \underline{\rho} \underline{v}_{th} ,$$

und erhalten

$$J_{SH} = \frac{8}{\pi^{\frac{3}{2}}} \tilde{v}_{th}^3 \cdot \epsilon . \quad (6.14)$$

Selbststösse vermindern diesen Wert nach Spitzer um den Faktor 0.582 .

7. Appendix B : Lösung der Modellgleichungen

*"Was wir nicht schwerfällig tun,
das haben wir ganz so wie nicht getan.
... Wir haben die Mühe gelobt und immer wieder die Mühe.
Und nun dürfen wir nicht so tun,
als verstünden wir nicht schwer."*

Botho Strauß, Trilogie des Wiedersehens

7.1. DIE SUBSTANTIELLE ABLEITUNG

In diesem Abschnitt wird linke Seite der Fokker-Planck-Gleichung, nämlich die substantielle Ableitung (Gl. (2.3))

$$\left(\frac{d\mathbf{f}_e(\underline{\mathbf{t}}, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{v}})}{d\underline{\mathbf{t}}} \right)_s = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \underline{\mathbf{t}}} + \mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \underline{\mathbf{x}}} - \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \frac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \mathbf{v}_x} \right) .$$

ausgewertet. Um die Dimensionen los zu werden, definieren wir

$$\left(\frac{f_e(t, x, \vec{u})}{dt} \right)_s \equiv \frac{1}{N_e(x)} \left(\frac{\mathbf{f}_e(t, x, \vec{u})}{d\underline{\mathbf{t}}} \right)_s .$$

Dann kann man unter Beachtung von

$$t = t(\underline{\mathbf{t}}) \quad x = x(\underline{\mathbf{x}}) \quad \vec{u} = \vec{u}(\underline{\mathbf{v}}, t(\underline{\mathbf{t}}), x(\underline{\mathbf{x}}))$$

nachrechnen, daß

$$\begin{aligned} \left(\frac{df_e(t, x, \vec{u})}{dt} \right)_s &= \dot{f}_e \\ &+ (w + \mu u) \left(v_{th} f'_e - 3v'_{th} f_e \right) \\ &- \left(\dot{w} + \varepsilon + (w + \mu u)(v_{th} w)' \right) \frac{\partial f_e}{\partial u_x} \\ &- v'_{th} (w + \mu u) \vec{u} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{u}} . \end{aligned} \tag{7.1}$$

Dieser Ausdruck wird nun mit einer Basisfunktion B_{ln} multipliziert und über $\vec{u}$ inte-

griert. Man erhält schließlich

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_{ln}} \int d\vec{u} B_{ln}(\vec{u}) \left(\frac{df_e}{dt} \right)_s \\
&= \dot{c}_{ln} + (v_{th} Z_{ln})' + v_{th}' \{ (2n+l) Z_{ln} - 2n Z_{ln-1} \} \\
&+ 2(\dot{w} + \epsilon) \left(-\frac{n(l+1)}{2l+3} c_{l+1n-1} + \frac{l}{2l-1} c_{l-1n} \right) \\
&+ 2(w v_{th})' \left(-\frac{n(l+1)}{2l+3} Z_{l+1n-1} + \frac{l}{2l-1} Z_{l-1n} \right) \\
&= \dot{c}_{ln} + Z_{ln}' + \frac{v_{th}'}{v_{th}} \{ (2n+l) Z_{ln} - 2n Z_{ln-1} \} \\
&+ \frac{2}{v_{th}} (\dot{w} + \epsilon) \left(-\frac{n(l+1)}{2l+3} c_{l+1n-1} + \frac{l}{2l-1} c_{l-1n} \right) \\
&+ \frac{2}{v_{th}} w' \left(-\frac{n(l+1)}{2l+3} Z_{l+1n-1} + \frac{l}{2l-1} Z_{l-1n} \right) \quad ; \quad l, n \geq 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{7.2}$$

wobei

$$Z_{ln} = w c_{ln} + \zeta_{ln} \quad , \quad Z_{ln} = v_{th} Z_{ln} = w c_{ln} + v_{th} \zeta_{ln} \quad ,$$

mit

$$\zeta_{ln} = \frac{l+1}{2} c_{l+1n} + \frac{n(l+1)}{2l+3} (c_{l+1n} - c_{l+1n-1}) - \frac{l}{2l-1} (c_{l-1n+1} - c_{l-1n}) \quad . \tag{7.3}$$

Dieses Ergebnis wurde erzielt durch partielles Integrieren und Ausnutzen der Identitäten

$$\mu u B_{ln} = \frac{l+1}{2l+1} (B_{ln} - B_{l+1n-1}) + \frac{l}{2l+1} \left((n+l+\frac{1}{2}) B_{l-1n} - (n+1) B_{l-1n+1} \right) \quad ,$$

$$u \partial_u B_{ln} = (2n+l) B_{ln} - 2(n+l+\frac{1}{2}) B_{l-1n} \quad ,$$

$$\partial_{u_z} B_{ln} = \frac{2}{2l+1} \left(-(l+1) B_{l+1n-1} + l(n+l+\frac{1}{2}) B_{l-1n} \right) \quad ,$$

$$\partial_\mu (1 - \mu^2) \partial_\mu B_{ln} = -l(l+1) B_{ln} \quad .$$

7.2. DIE IONENGLEICHUNGEN

Die *Kontinuitätsgleichung* der Ionen lautet (Gl. (2.9))

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial \underline{t}}(\rho \underline{v}) + \frac{\partial}{\partial \underline{x}}(\rho \underline{v} \underline{w}) \\
 &= \rho \left(\frac{1}{\underline{r}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\underline{v}_{th}}{\underline{\lambda}} \frac{\partial}{\partial x}(\rho \underline{w}) \right) \\
 &= \frac{\rho}{\underline{r}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \underline{w}) \right), \text{ oder} \\
 0 &= \dot{\rho} + (\rho \underline{w})' .
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

(Kontinuität)

Die Erhaltung der Gesamtenergie ergibt (Gl. (2.8))

$$0 = \int d\underline{v} \left(\frac{d\underline{f}_e}{d\underline{t}} \right)_s \left\{ \frac{1}{2} m_e \underline{v}^2 \right\} + \int d\underline{v} \left(\frac{d\underline{f}_p}{d\underline{t}} \right)_s \left\{ \frac{1}{2} m_p \underline{v}^2 \right\} .$$

Die *dimensionslosen* Grössen $\left(\frac{d\underline{f}_e}{d\underline{t}} \right)_s$, $\left(\frac{d\underline{f}_p}{d\underline{t}} \right)_s$ sind durch (1.3, 1.4)

$$\left(\frac{d\underline{f}_e}{d\underline{t}} \right)_s = \frac{\mathcal{N}_e(x)}{\underline{r}} \left(\frac{df_e}{dt} \right)_s ,$$

$$\left(\frac{d\underline{f}_p}{d\underline{t}} \right)_s = \frac{\mathcal{N}_p(t, x)}{\underline{r}} \left(\frac{df_p}{dt} \right)_s .$$

definiert. Deshalb folgt

$$0 = v_{th}^2(x) m_r \int d\underline{u} \left(\frac{df_e}{dt} \right)_s (\tilde{w} + \tilde{u})^2 + w_{th}^2(t, x) \int d\underline{u} \left(\frac{df_p}{dt} \right)_s (\tilde{w} + \tilde{u})^2 . \tag{7.5}$$

$\left(\frac{df_p}{dt} \right)_s$ lautet explizit (Gl. (1))

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{df_p}{dt} \right)_s &= \dot{f}_p - 3 \frac{\dot{w}_{th}}{w_{th}} f_p \\
 &\quad + w_{th}(\tilde{w} + \mu \tilde{u}) \left(f_p' - 3 \frac{w'_{th}}{w_{th}} f_p \right) \\
 &\quad - \left(\dot{\tilde{w}} + \tilde{w} \frac{\dot{w}_{th}}{w_{th}} - \frac{m_r v_{th}}{w_{th}} \varepsilon + (\tilde{w} + \mu \tilde{u})(w_{th} \tilde{w})' \right) \frac{\partial f_p}{\partial \tilde{u}_x} \\
 &\quad - \left(v'_{th}(\tilde{w} + \mu \tilde{u}) + \frac{\dot{w}_{th}}{w_{th}} \right) \tilde{u} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \tilde{u}} .
 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die zu Gl. (2) analoge Gleichung

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_{ln}} \int d\vec{u} B_{ln}(\vec{u}) \left(\frac{df_p}{dt} \right)_s \\
&= \dot{c}_{ln}^* + \frac{\dot{w}_{th}}{w_{th}} ((2n+l)c_{ln}^* - 2nc_{ln-1}^*) \\
&+ (w_{th} Z_{ln}^*)' + w_{th}' \{ (2n+l)Z_{ln}^* - 2nZ_{ln-1}^* \} \\
&+ 2 \left(\dot{w} + \dot{w} \frac{w_{th}}{w_{th}} - \frac{m_r v_{th}}{w_{th}} \epsilon \right) \left(-\frac{n(l+1)}{2l+3} c_{l+1n-1}^* + \frac{l}{2l-1} c_{l-1n}^* \right) \\
&+ 2 \left(\dot{w} w_{th} \right)' \left(-\frac{n(l+1)}{2l+3} Z_{l+1n-1}^* + \frac{l}{2l-1} Z_{l-1n}^* \right) \\
&= \dot{c}_{ln}^* + \frac{\dot{w}_{th}}{w_{th}} ((2n+l)c_{ln}^* - 2nc_{ln-1}^*) \\
&+ (w_{th} Z_{ln}^*)' + w_{th}' \{ (2n+l)Z_{ln}^* - 2nZ_{ln-1}^* \} \\
&+ \frac{2}{w_{th}} (\dot{w} - m_r \epsilon) \left(-\frac{n(l+1)}{2l+3} c_{l+1n-1}^* + \frac{l}{2l-1} c_{l-1n}^* \right) \\
&+ 2w' \left(-\frac{n(l+1)}{2l+3} Z_{l+1n-1}^* + \frac{l}{2l-1} Z_{l-1n}^* \right) .
\end{aligned}$$

Dabei ist (Gl. (3))

$$Z_{ln}^* = \tilde{w} c_{ln}^* + \zeta_{ln}^* = \frac{w}{w_{th}} c_{ln}^* + \zeta_{ln}^* .$$

Das •-Zeichen bedeutet, daß sich die betreffende GröÙe auf die Ionen bezieht.

Wir beschränken uns hier auf *maxwellsche* Ionen*, mithin:

$$c_{oo}^* = \rho, c_{ln}^* = 0; \quad \text{falls } (l, n) \neq (0, 0) .$$

Effektiv sind also nur folgende Z_{ln}^* ungleich Null:

$$Z_{oo}^* = \frac{w}{w_{th}} \rho, Z_{1o}^* = \rho .$$

Anhand dieser Tatsache wollen wir nun folgende Spezialfälle berechnen:

$$\frac{1}{h_{oo}} \int d\vec{u} B_{oo}(\vec{u}) \left(\frac{df_p}{dt} \right)_s = \dot{\rho} + (w\rho)' = 0 , \quad (7.6)$$

$$\frac{1}{h_{1o}} \int d\vec{u} B_{1o}(\vec{u}) \left(\frac{df_p}{dt} \right)_s = (w_{th}\rho)' + w_{th}'\rho + 2w' \frac{w}{w_{th}} \rho + \frac{2}{w_{th}} (\dot{w} - m_r \epsilon) \rho , \quad (7.7)$$

$$\frac{1}{h_{o1}} \int d\vec{u} B_{o1}(\vec{u}) \left(\frac{df_p}{dt} \right)_s = -2 \frac{\dot{w}_{th}}{w_{th}} \rho - 2w' \frac{w}{w_{th}} \rho - \frac{2}{3} w' \rho . \quad (7.8)$$

*vgl. 2.1.

Ausnutzung der Identität

$$(\vec{w} + \vec{u})^2 = \left(w^2 + \frac{3}{2}\right) B_{oo} + 2wB_{1o} - B_{o1}$$

liefert dann unter Einbeziehung von Gln. (6, 7, 8) die *Energiebilanz* :

$$\begin{aligned} 0 = v_{th}^2 m_r \left[w \left(\dot{c}_{1o} + (v_{th} Z_{1o})' + v_{th}' Z_{1o} + 2(\dot{w} + \epsilon) c_{oo} + 2(w v_{th})' Z_{oo} \right) \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \left(\dot{c}_{o1} + (v_{th} Z_{o1})' + 2v_{th}' (Z_{o1} - Z_{oo}) - \frac{2}{3}(\dot{w} + \epsilon) c_{1o} - \frac{2}{3}(w v_{th})' Z_{oo} \right) \right] \\ + w_{th}^2 \left[\frac{w}{w_{th}} \left((w_{th} \rho)' + w_{th}' \rho + 2w' \frac{w}{w_{th}} \rho + \frac{2}{w_{th}} (\dot{w} - m_r \epsilon) \rho \right) \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \left(-2 \frac{\dot{w}_{th}}{w_{th}} \rho - 2w' \frac{w}{w_{th}} \rho - \frac{2}{3} w' \rho \right) \right] . \end{aligned} \quad (7.9)$$

(Energiebilanz)

Aus der Forderung

$$0 = v_{th}(x) m_r \int d\vec{u} \left(\frac{df_e}{dt} \right)_s (\vec{w} + \vec{u}) + w_{th}(t, x) \int d\vec{u} \left(\frac{df_p}{dt} \right)_s (\vec{w} + \vec{u}) .$$

erwächst ganz analog die *Impulsbilanz* :

$$\begin{aligned} 0 = v_{th} m_r \left(\dot{c}_{1o} + (v_{th} Z_{1o})' + v_{th}' Z_{1o} + 2(\dot{w} - \epsilon) c_{oo} + 2(w v_{th})' Z_{oo} \right) \\ + w_{th} \left((w_{th} \rho)' + w_{th}' \rho + 2w' \frac{w}{w_{th}} \rho + \frac{2}{w_{th}} (\dot{w} - m_r \epsilon) \rho \right) \\ = m_r \left(v_{th} \dot{c}_{1o} + (v_{th} Z_{1o})' + 2(\dot{w} + \epsilon) c_{oo} + 2w' Z_{oo} \right) \\ + (w_{th})^2 \rho' + \left((w^2)' + (w_{th}^2)' + 2(\dot{w} - m_r \epsilon) \right) \rho . \end{aligned} \quad (7.10)$$

(Impulsbilanz)

Wir benutzen noch die Identitäten

$$Z_{oo} = w c_{oo} + \frac{v_{th}}{2} c_{1o} , \quad (7.11)$$

$$Z_{1o} = w c_{1o} + v_{th} (c_{2o} - c_{o1} + c_{oo}) , \quad (7.12)$$

$$Z_{o1} = w c_{o1} + v_{th} \left(\frac{5}{6} c_{11} - \frac{1}{3} c_{1o} \right) , \quad (7.13)$$

$$c_{oo} = \rho \text{ (Quasineutralität)} . \quad (7.14)$$

Aus Gl. (10) wird dann

$$0 = (\mathbf{w}_{th}^2 \rho)' + (1 + m_r) \left((\mathbf{w}^2)' + 2\dot{\mathbf{w}} \right) \rho + m_r \left(v_{th} \dot{c}_{1o} + 2\mathbf{w}' v_{th} c_{1o} + (v_{th}^2 (c_{2o} - c_{o1} + c_{oo}))' \right) \quad (7.15)$$

(Impulsbilanz)

Einsetzen von Gl. (10) in Gl. (9) und Anwendung von Gln. (11, 12, 13, 14) gibt andererseits

$$0 = \left((\mathbf{w}_{th}^2) + \mathbf{w} (\mathbf{w}_{th}^2 + m_r v_{th}^2)' + \frac{2}{3} \mathbf{w}' (\mathbf{w}_{th}^2 + m_r v_{th}^2) \right) \rho + m_r \left\{ -v_{th}^2 \dot{c}_{o1} - (c_{o1} v_{th}^2)' \mathbf{w} - \left(\frac{5}{3} c_{o1} - \frac{2}{3} c_{2o} \right) v_{th}^2 \mathbf{w}' + \frac{1}{3} c_{1o} \left(\frac{5}{3} (v_{th}^3)' + v_{th} (\mathbf{w}^2)' + 2v_{th} (\dot{\mathbf{w}} - \epsilon) \right) - \frac{5}{6} (c_{11} v_{th}^3)' \right\} \quad (7.16)$$

(Energiebilanz)

Bei der Ableitung von Gl. (16) wurde die Eigenschaft

$$(v_{th} c_{1o})' = 0$$

herangezogen, welche aus den Ionen- und Elektronen-Kontinuitätsgleichungen

$$\dot{\rho} + (\rho \mathbf{w})' = 0, \quad \dot{c}_{oo} + \left(\mathbf{w} c_{oo} + \frac{1}{2} v_{th} c_{1o} \right)' = 0$$

und der Neutralitätsbedingung Gl. (14) folgt.

Aus Gründen der numerischen Stabilität werden im Code anstelle der Variablen $\mathbf{w}, \mathbf{w}_{th}$ die Grössen†

$$T_p \equiv \frac{\mathbf{w}_{th}^2}{m_r} \quad \mathbf{w}_p \equiv \frac{\mathbf{w}}{\sqrt{m_r}}$$

verwendet. Physikalisch bedeutet diese Transformation, daß Ionentemperatur und -schwerpunktsgeschwindigkeit nun an der absoluten Geschwindigkeit $\sqrt{m_r} \mathbf{v}_{th}$ gemessen

†vgl. A 6.2

werden, welche im thermischen Gleichgewicht ein Maß für die thermische Geschwindigkeit der *Ionen* ist; zuvor waren die Ionengrößen auf die thermische Geschwindigkeit der *Elektronen* bezogen.

Damit lauten die 3 Ionengleichungen endgültig

$$0 = \dot{\rho}_p + \sqrt{m_r} (\rho_p w_p)' \quad (7.17)$$

(Kontinuität)

$$\begin{aligned} 0 = & 2(1 + m_r) \dot{w}_p \rho_p \\ & + \sqrt{m_r} \left\{ v_{th} \dot{c}_{10} + 2\sqrt{m_r} w_p' v_{th} c_{10} + (v_{th}^2 (c_{20} - c_{01} + c_{00}))' \right. \\ & \left. + (T_p \rho_p)' + (1 + m_r) \rho_p (w_p^2)' \right\} \quad (7.18) \end{aligned}$$

(Impulsbilanz)

$$\begin{aligned} 0 = & \left\{ \dot{T}_p + \sqrt{m_r} \left(w_p (T_p + v_{th}^2)' + \frac{2}{3} w_p' (T_p + v_{th}^2) \right) \right\} \rho_p \\ & - v_{th}^2 \dot{c}_{01} \\ & - \sqrt{m_r} (c_{01} v_{th}^2)' w_p \\ & - \sqrt{m_r} \left(\frac{5}{3} c_{01} - \frac{2}{3} c_{20} \right) v_{th}^2 w_p' \\ & + \frac{1}{3} c_{10} \left(\frac{5}{3} (v_{th}^3)' + m_r v_{th} (w_p^2)' + 2v_{th} (\sqrt{m_r} \dot{w}_p - \epsilon) \right) \\ & - \frac{5}{6} (c_{11} v_{th}^3)' \quad (7.19) \end{aligned}$$

(Energiebilanz)

7.3. STÖSSE MIT MAXWELLSCHEN IONEN

Die Elektronen-Ionen-Wechselwirkung lautet (Gl. (2.4-2.6))

$$\left(\frac{d\mathbf{f}_e}{d\mathbf{z}}\right)_c^{e/p} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} \left(\mathbf{f}_e(\mathbf{v}) \langle \Delta \mathbf{v}_i \rangle^{e/p} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}_i \partial \mathbf{v}_j} \left(\mathbf{f}_e(\mathbf{v}) \langle \Delta \mathbf{v}_i \Delta \mathbf{v}_j \rangle^{e/p} \right) ,$$

wobei

$$\langle \Delta \mathbf{v}_i \rangle^{e/p} = (1 + m_r) \frac{\mathcal{L}^{e/p}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} \Phi_p(\mathbf{v}) \quad ; \quad \Phi_p(\mathbf{v}) = \int d\mathbf{v}' \frac{\mathbf{f}_p(\mathbf{v}')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}$$

und

$$\langle \Delta \mathbf{v}_i \Delta \mathbf{v}_j \rangle^{e/p} = \frac{\mathcal{L}^{e/p}}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}_i \partial \mathbf{v}_j} \Psi_p(\mathbf{v}) \quad ; \quad \Psi_p(\mathbf{v}) = \int d\mathbf{v}' \mathbf{f}_p(\mathbf{v}') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| ,$$

$$\mathcal{L}^{e/p} \equiv \Lambda \left(\frac{4\pi e^2}{m_e} \right)^2 .$$

Oder dimensionslos :

$$\left(\frac{df_e}{dt}\right)_c^{e/p} = -\partial_{u_i} \left(f_e(\mathbf{u}) \langle \Delta u_i \rangle^{e/p} \right) + \frac{1}{2} \partial_{u_i u_j} \left(f_e(\mathbf{u}) \langle \Delta u_i \Delta u_j \rangle^{e/p} \right) , \quad (7.20)$$

mit

$$\langle \Delta u_i \rangle^{e/p} = (1 + m_r) \frac{\rho}{\pi^{\frac{1}{2}} w_{th}^3 v_{th}^3} \partial_{u_i} \Phi^\xi(\mathbf{u}) \quad , \quad \Phi^\xi(\mathbf{u}) = \int d\mathbf{u}' \frac{e^{-\xi \mathbf{u}'^2}}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|} ,$$

$$\langle \Delta u_i \Delta u_j \rangle^{e/p} = \frac{\rho}{\pi^{\frac{1}{2}} w_{th}^3 v_{th}^3} \partial_{u_i u_j} \Psi^\xi(\mathbf{u}) \quad , \quad \Psi^\xi(\mathbf{u}) = \int d\mathbf{u}' e^{-\xi \mathbf{u}'^2} |\mathbf{u} - \mathbf{u}'| ,$$

$$\xi \equiv \frac{1}{w_{th}^2} .$$

Wir multiplizieren Gl. (20) mit einer Burnettfunktion B_{In} , nutzen die Relation⁴
 $\Phi^\xi = \frac{1}{2} \Delta \Psi^\xi$ und integrieren partiell über den ganzen Geschwindigkeitsraum, wobei

der Integrand für $u \rightarrow \infty$ verschwindet.

$$\begin{aligned}
& \int d\bar{u} B_{ln}(\bar{u}) \left(\frac{df_e}{dt} \right)_c^{e/p} \\
&= \frac{\rho}{\pi^{\frac{1}{2}} w_{th}^3 v_{th}^3} \times \\
& \left[(1 + m_r) \int d\bar{u} f_e(\bar{u}) \partial_{u_i} B_{ln}(\bar{u}) \partial_{u_i} \Phi^\xi(\bar{u}) + \frac{1}{2} \int d\bar{u} f_e(\bar{u}) \partial_{u_i u_j} B_{ln}(\bar{u}) \partial_{u_i u_j} \Psi^\xi(\bar{u}) \right] \\
&= \frac{\rho}{\pi^{\frac{1}{2}} w_{th}^3 v_{th}^3} \frac{2\pi}{2l+1} \times \\
& \sum_{m \geq 0} c_{lm} \left\{ (1 + m_r) \left[(2n + l) \left(\frac{1}{2} \Psi_{lnm}^{\xi''' } + \Psi_{lnm}^{\xi'' } - \Psi_{lnm}^{\xi' } \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (2n + 2l + 1) \left(\frac{1}{2} \Psi_{ln-1m}^{\xi''' } + \Psi_{ln-1m}^{\xi'' } - \Psi_{ln-1m}^{\xi' } \right) \right] \right. \\
& \quad + (2n + l) \Psi_{lnm}^{\xi' } - (2n + 2l + 1) \Psi_{ln-1,m}^{\xi' } - \frac{l(l+1)}{2} \Psi_{lnm}^{\xi' } \\
& \quad + \frac{1}{2} \left[(2n + l)(2n + l - 1) \Psi_{lnm}^{\xi'' } \right. \\
& \quad \left. - (2n + 2l + 1)(4n + 2l - 3) \Psi_{ln-1m}^{\xi'' } \right. \\
& \quad \left. + (2n + 2l + 1)(2n + 2l - 1) \Psi_{ln-2m}^{\xi'' } \right] \left. \right\} , \tag{7.21}
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\Psi_{lnm}^{\xi'} &\equiv \int_0^\infty s^{l-1} L_n^{l+\frac{1}{2}}(s) L_m^{l+\frac{1}{2}}(s) \Psi^{\xi'}(\sqrt{s}) e^{-s} , \\
\Psi_{lnm}^{\xi''} &\equiv \int_0^\infty s^{l-\frac{1}{2}} L_n^{l+\frac{1}{2}}(s) L_m^{l+\frac{1}{2}}(s) \Psi^{\xi''}(\sqrt{s}) e^{-s} , \\
\Psi_{lnm}^{\xi'''} &\equiv \int_0^\infty s^l L_n^{l+\frac{1}{2}}(s) L_m^{l+\frac{1}{2}}(s) \Psi^{\xi'''}(\sqrt{s}) e^{-s} .
\end{aligned}$$

$\left\{ \dots \right\}_{lnm}$ kürzt fürderhin die geschweifte Klammer in Gl. (21) ab. Die Integrale $\Psi_{lnm}^{\xi'}$, $\Psi_{lnm}^{\xi''}$, $\Psi_{lnm}^{\xi'''}$ sollen noch auf elementare Integrale zurückgeführt werden. Dazu bedienen wir uns der algebraischen Beziehungen

$$\Psi_{lnm}^{\xi'} = \left(\frac{\pi}{\xi} \right)^{\frac{3}{2}} \left\{ F_{lnm}^{\xi} - \frac{1}{2} \xi^{-\frac{1}{2}} G_{lnm}^{\xi} \right\} , \tag{7.22}$$

$$\Psi_{lnm}^{\xi''} = \left(\frac{\pi}{\xi} \right)^{\frac{3}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} G_{lnm}^{\xi} , \tag{7.23}$$

$$\Psi_{lnm}^{\xi m} = \left(\frac{\pi}{\xi}\right)^{\frac{3}{2}} \left\{ 2 \left[3F_{lnm}^{\xi} - (n+1)F_{l+1m}^{\xi} - (m+1)F_{lnm+1}^{\xi} \right. \right. \\ \left. \left. + (n+l+\frac{1}{2})F_{ln-1m}^{\xi} + (m+l+\frac{1}{2})F_{lnm-1}^{\xi} \right] \right. \\ \left. - 3\xi^{-\frac{1}{2}}G_{lnm}^{\xi} \right\}, \quad (7.24)$$

wobei

$$F_{lnm}^{\xi} \equiv \int_0^{\infty} ds s^{l-1} L_n^{l+\frac{1}{2}}(s) L_m^{l+\frac{1}{2}}(s) \phi(\sqrt{\xi}s) e^{-s}, \\ G_{lnm}^{\xi} \equiv \int_0^{\infty} ds s^{l-\frac{3}{2}} L_n^{l+\frac{1}{2}}(s) L_m^{l+\frac{1}{2}}(s) \left\{ \frac{\phi(\sqrt{\xi}s)}{\sqrt{\xi}s} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi s} \right\} e^{-s}, \\ \phi(s) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s ds' e^{-s'^2}.$$

Gln. (22, 23, 24) eingesetzt in Gl. (21) liefert

$$\frac{1}{h_{ln}} \int d\bar{u} B_{ln}(\bar{u}) \left(\frac{df_e}{dt} \right)_c^{e/p} \\ = \frac{2l+1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{n!}{(n+l+\frac{1}{2})!} \frac{\rho}{\pi^{\frac{1}{2}} w_{th}^3 v_{th}^3} \frac{2\pi}{2l+1} \times \sum_{m \geq 0} c_{lm} \left\{ \dots \right\}_{lnm} \\ - \frac{n!}{(n+l+\frac{1}{2})!} \sqrt{\pi} \frac{\rho}{v_{th}^3} \times \sum_{m \geq 0} c_{lm} G_{lnm}^{e/p}(\xi). \quad (7.25)$$

Dabei ist

$$\left\{ \dots \right\}_{lnm} = \left(\frac{\pi}{\xi} \right)^{\frac{3}{2}} G_{lnm}^{e/p}(\xi)$$

und

$$G_{lnm}^{e/p}(\xi) = m_r \left[2(2n+l) \left(F_{l+1nm}^{\xi} - F_{l+1n-1m-1}^{\xi} - (l+\frac{1}{2})F_{lnm}^{\xi} \right) \right. \\ \left. - 4(n+l+\frac{1}{2}) \left(F_{l+1n-1m}^{\xi} - F_{l+1n-2m-1}^{\xi} - (l+\frac{1}{2})F_{ln-1m}^{\xi} \right) \right] \\ + 2(2n+l) \left(F_{l+1nm}^{\xi} - F_{l+1n-1m-1}^{\xi} - lF_{lnm}^{\xi} \right) \\ - 4(n+l+\frac{1}{2}) \left(F_{l+1n-1m}^{\xi} - F_{l+1n-2m-1}^{\xi} - lF_{ln-1m}^{\xi} \right) \\ - \frac{l(l+1)}{2} F_{lnm}^{\xi} \\ + \xi^{-\frac{1}{2}} \left[\left((2n+l)(2n+l-2) + \frac{l(l+1)}{2} \right) \frac{1}{2} G_{lnm}^{\xi} \right. \\ \left. (2n+l-2)(n+l+\frac{1}{2}) 2 G_{ln-1m}^{\xi} \right. \\ \left. (n+l+\frac{1}{2})(n+l-\frac{1}{2}) 2 G_{ln-1m}^{\xi} \right].$$

Im Falle unendlich massiver, ruhender Ionen haben wir

$$\xi = \infty, \quad m_r = 0,$$

und man kann zeigen, daß sich der Stoßoperator auf

$$C_{lnm}^{e/p}(\infty) = -\frac{l(l+1)}{2} F_{lnm}^{\infty}$$

reduziert, wobei

$$F_{lnm}^{\infty} = \int_0^{\infty} ds s^{l-1} L_n^{l+\frac{1}{2}}(s) L_m^{l+\frac{1}{2}}(s) e^{-s}.$$

Die Singularität der Integrale F_{onm}^{∞} stört nicht, da in diesem Fall der Vorfaktor identisch 0 ist.

7.4. SELBSTWECHSELWIRKUNG DER ELEKTRONEN

*"Um sich zu unterhalten,
kamen sie auf den Gedanken, einen Turm zu bauen,
so hoch, daß er bis in Himmel rage.
Dieser Gedanke ist ebenso langweilig wie der Turm hoch war ..."*
Kierkegaard, Entweder/Oder

Der Elektronen-Selbststossoperator lautet in dimensionsloser Schreibweise (vgl. Gl. (21))

$$\frac{1}{h_{ln}} \int d\vec{u} B_{ln}(\vec{u}) \left(\frac{df_e}{dt} \right)_e^{e/e} = \frac{1}{\pi^2} (2l+1) \frac{n!}{(n+l+\frac{1}{2})!} \frac{1}{v_{th}^3} \times \quad (7.26)$$

$$\left[\int d\vec{u} f_e(\vec{u}) \partial_{u_i} B_{ln}(\vec{u}) \partial_{u_i} \Phi(\vec{u}) + \frac{1}{4} \int d\vec{u} f_e(\vec{u}) \partial_{u_i u_j} B_{ln}(\vec{u}) \partial_{u_i u_j} \Psi(\vec{u}) \right],$$

wobei

$$\Phi(\vec{u}) = \int d\vec{u}' \frac{f_e(\vec{u}')}{|\vec{u} - \vec{u}'|}$$

und

$$\Psi(\vec{u}) = \int d\vec{u}' f_e(\vec{u}') |\vec{u} - \vec{u}'|.$$

Φ und Ψ erlauben die Darstellungen

$$\Phi(\vec{u}) = \sum_{l,n \geq 0} c_{ln} P_l(\mu) \Phi_{ln}(u), \quad (7.27)$$

$$\Psi(\vec{u}) = \sum_{l,n \geq 0} c_{ln} P_l(\mu) \Psi_{ln}(u). \quad (7.28)$$

P_l sind die *Legendrepolynome*. Aus Gl. (28) folgt insbesondere

$$\Delta \Psi = \sum_{l,n \geq 0} c_{ln} P_l \left(\partial_{uu} \Psi_{ln} + \frac{2}{u} \partial_u \Psi_{ln} - l(l+1) \frac{1}{u^2} \Psi_{ln} \right),$$

also auch wegen $\Phi = \frac{1}{2} \Delta \Psi$:

$$\Phi_{ln} = \frac{1}{2} \left(\partial_{uu} \Psi_{ln} + \frac{2}{u} \partial_u \Psi_{ln} - l(l+1) \frac{1}{u^2} \Psi_{ln} \right). \quad (7.29)$$

Damit sind die Potentiale Φ und Ψ auf die Ψ_{ln} zurückgeführt, deren Struktur wir uns jetzt zuwenden. Durch Induktion kann man zeigen:

$$\begin{aligned} \Psi_{ln}(u) = \frac{4\pi}{2l+1} \left(-\frac{1}{2l-1} u^{-l+1} \beta\left(l + \frac{1}{2}, n, 2(l+1), u\right) \right. \\ + \frac{1}{2l+3} u^{-l-1} \beta\left(l + \frac{1}{2}, n, 2(l+2), u\right) \\ - \frac{1}{2l-1} u^l \beta_c\left(l + \frac{1}{2}, n, 3, u\right) \\ \left. + \frac{1}{2l+3} u^{l+2} \beta_c\left(l + \frac{1}{2}, n, 1, u\right) \right), \end{aligned} \quad (7.30)$$

wobei

$$\beta(\alpha, n, k, u) \equiv \int_0^u ds s^k L_n^\alpha(s^2) e^{-s^2}, \quad \beta_c(\alpha, n, k, u) \equiv \int_u^\infty ds s^k L_n^\alpha(s^2) e^{-s^2}.$$

Dank der Eigenschaften der β, β_c ist es mit den Ableitungen der Ψ_{ln} wie folgt bestellt:

$$\begin{aligned} \Psi'_{ln}(u) = \frac{4\pi}{2l+1} \left(-\frac{1}{2l-1} (-l+1) u^{-l} \beta\left(l + \frac{1}{2}, n, 2(l+1), u\right) \right. \\ + \frac{1}{2l+3} (-l-1) u^{-l-2} \beta\left(l + \frac{1}{2}, n, 2(l+2), u\right) \\ - \frac{1}{2l-1} l u^{l-1} \beta_c\left(l + \frac{1}{2}, n, 3, u\right) \\ \left. + \frac{1}{2l+3} (l+2) u^{l+1} \beta_c\left(l + \frac{1}{2}, n, 1, u\right) \right), \\ \Psi''_{ln}(u) = \frac{4\pi}{2l+1} \left(-\frac{1}{2l-1} (-l+1)(-l) u^{-l-1} \beta\left(l + \frac{1}{2}, n, 2(l+1), u\right) \right. \\ + \frac{1}{2l+3} (-l-1)(-l-2) u^{-l-3} \beta\left(l + \frac{1}{2}, n, 2(l+2), u\right) \\ - \frac{1}{2l-1} l(l-1) u^{l-2} \beta_c\left(l + \frac{1}{2}, n, 3, u\right) \\ \left. + \frac{1}{2l+3} (l+2)(l+1) u^l \beta_c\left(l + \frac{1}{2}, n, 1, u\right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{ln}'''(u) = & \frac{4\pi}{2l+1} \left(-\frac{1}{2l-1} (-l+1)(-l)(-l-1) u^{-l-2} \beta(l+\frac{1}{2}, n, 2(l+1), u) \right. \\ & + \frac{1}{2l+3} (-l-1)(-l-2)(-l-3) u^{-l-4} \beta(l+\frac{1}{2}, n, 2(l+2), u) \\ & - \frac{1}{2l-1} l(l-1)(l-2) u^{l-3} \beta_c(l+\frac{1}{2}, n, 3, u) \\ & \left. + \frac{1}{2l+3} (l+2)(l+1)l u^{l-1} \beta_c(l+\frac{1}{2}, n, 1, u) \right) .\end{aligned}$$

Die Ψ_{ln} und deren Ableitungen erlauben also ihrerseits eine Darstellung durch die Funktionen β, β_c .

β, β_c werden numerisch erzeugt wie folgt:

$$\begin{aligned}\beta(\alpha, n, k, u) = & \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{1}{m!} \\ & \left\{ \left(m + \frac{k-1}{2}\right)! \sqrt{\pi} \phi(u) \right. \\ & - \left(u^{2m+k-1} \right. \\ & + u^{2m+k-3} \left(\frac{k-1}{2} + m\right) \\ & + u^{2m+k-5} \left(\frac{k-1}{2} + m\right) \left(\frac{k-1}{2} + m - 1\right) \\ & + \dots \\ & \left. + u \left(\frac{k-1}{2} + m\right) \left(\frac{k-1}{2} + m - 1\right) \dots \frac{3}{2} \right) e^{-u^2} \left. \right\} ,\end{aligned}$$

für gerade k , und falls k ungerade :

$$\beta_c(\alpha, n, k, u) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{1}{m!} \left(m + \frac{k-1}{2}\right)! \sum_{l=0}^{m+\frac{k-1}{2}} \frac{x^{2l}}{l!} e^{-u^2} .$$

Nun zurück zu Gl. (26).

Die Darstellung (Gl. (2.12))

$$f_e(\vec{u}) = \sum_{l_1, n_1 \geq 0} c_{l_1 n_1} B_{l_1 n_1}(\vec{u}) e^{-u^2}$$

induziert die Zerlegung

$$\begin{aligned}& \int d\vec{u} f_e(\vec{u}) \partial_{u_i u_j} B_{ln}(\vec{u}) \partial_{u_i u_j} \Psi(\vec{u}) \\ = & c_{l_1 n_1} c_{l_2 n_2} \int d\vec{u} B_{l_1 n_1}(\vec{u}) \partial_{u_i u_j} B_{ln}(\vec{u}) \partial_{u_i u_j} (P_{l_2}(\mu) \Psi_{l_2 n_2}(u)) e^{-u^2} .\end{aligned} \quad (7.31)$$

Es lohnt sich also folgende Aufschlüsselung:

$$\begin{aligned}
& \partial_{u_i u_j} B_{ln}(\bar{u}) \partial_{u_i u_j} \left(P_{l_2}(\mu) \Psi_{l_2 n_2}(u) \right) \\
&= P_l P_{l_2} \partial_{uu} b_{ln} \partial_{uu} \Psi_{l_2 n_2} \\
&+ \left[\frac{1}{u^2} \partial_{\theta\theta} P_l b_{ln} + \frac{1}{u} P_l \partial_u b_{ln} \right] \times \left[\frac{1}{u^2} \partial_{\theta\theta} P_{l_2} \Psi_{l_2 n_2} + \frac{1}{u} P_{l_2} \partial_u \Psi_{l_2 n_2} \right] \\
&+ \left[\frac{1}{u^2} \cot\theta \partial_\theta P_l b_{ln} + \frac{1}{u} P_l \partial_u b_{ln} \right] \times \left[\frac{1}{u^2} \cot\theta \partial_\theta P_{l_2} \Psi_{l_2 n_2} + \frac{1}{u} P_{l_2} \partial_u \Psi_{l_2 n_2} \right] \\
&+ 2 \left[-\frac{1}{u^2} \partial_\theta P_l b_{ln} + \frac{1}{u} \partial_\theta P_l \partial_u b_{ln} \right] \times \left[-\frac{1}{u^2} \partial_\theta P_{l_2} \Psi_{l_2 n_2} + \frac{1}{u} \partial_\theta P_{l_2} \partial_u \Psi_{l_2 n_2} \right] ,
\end{aligned}$$

wobei

$$b_{ln}(u) \equiv u^l L_n^{l+\frac{1}{2}}(u^2) .$$

Dies folgt, indem man die kovarianten Ableitungen

$$\nabla \otimes \nabla \left(P_l b_{ln} \right) , \quad \nabla \otimes \nabla \left(P_{l_2} \Psi_{l_2 n_2} \right)$$

miteinander Tensor-multipliziert und anschließend zu einem Skalar verjüngt.

Die allgemeine Form dieser kovarianten Ableitungen sei noch notiert :

$$\begin{aligned}
\nabla \otimes \nabla S &= \partial_{uu} S e_u \otimes e_u \\
&+ \frac{1}{u} \partial_{u\theta} S (e_u \otimes e_\theta + e_\theta \otimes e_u) \\
&+ \frac{1}{u^2} \partial_{\theta\theta} S (e_\theta \otimes e_\theta) \\
&+ \frac{1}{u} \partial_u S (e_\theta \otimes e_\theta + e_\phi \otimes e_\phi) \\
&- \frac{1}{u^2} \partial_\theta S (e_u \otimes e_\theta + e_\theta \otimes e_u - \cot\theta e_\phi \otimes e_\phi) ,
\end{aligned}$$

S steht für $P_l b_{ln}$ bzw. $P_{l_2} \Psi_{l_2 n_2}$.

Die Ableitungen der P_l bzw. b_{ln} sollen noch durch Linearkombinationen der nicht abgeleiteten Grössen ausdrückt werden. Das bewerkstelligen die Identitäten

$$\partial_{\theta\theta} P_l = -l^2 P_l + \sum_{k \geq 0} (2l - 4k - 3) P_{l-2k-2} , \quad (7.32)$$

$$\cot\theta \partial_\theta P_l = -l P_l - \sum_{k \geq 0} (2l - 4k - 3) P_{l-2k-2} , \quad (7.33)$$

$$(\partial_{\theta\theta} + \cot\theta \partial_\theta) P_l = -l(l+1) P_l , \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta P_l \partial_\theta P_{l_2} = & \left(\sum_{k \geq 0} (2l - 4k - 1) P_{l-2k-1} \right) \left(\sum_{k' \geq 0} (2l_2 - 4k' - 1) P_{l_2-2k'-1} \right) \\ & - \left(l P_l + \sum_{k \geq 0} (2l - 4k - 3) P_{l-2k-2} \right) \left(l_2 P_{l_2} + \sum_{k' \geq 0} (2l_2 - 4k' - 3) P_{l_2-2k'-2} \right), \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$u \partial_u b_{ln} = (2n + l) b_{ln} - (2n + 2l + 1) b_{l, n-1}, \quad (7.36)$$

$$\partial_{uu} = \frac{1}{u^2} u \partial_u (u \partial_u - 1). \quad (7.37)$$

In letzter Zerlegung von Gl. (31) bleiben also Integrale der Form

$$P(l_1, l, l_2) \equiv \int_{-1}^{+1} d\mu P_{l_1}(\mu) P_l(\mu) P_{l_2}(\mu), \quad (7.38)$$

$$\int_0^\infty u^2 du b_{l_1 n_1}(u) \frac{1}{u^2} b_{ln}(u) \Psi''_{l_2 n_2}(u) e^{-u^2}. \quad (7.39)$$

Wir substituieren noch $u = \sqrt{s}$ in Gl. (39) und kürzen ab wie folgt:

$$R_0(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) \equiv \int_0^\infty ds s^{\frac{l_1+l-3}{2}} L_{n_1}^{l_1+\frac{1}{2}}(s) L_n^{l+\frac{1}{2}}(s) \Psi_{l_2 n_2}(\sqrt{s}) e^{-s}, \quad (7.40)$$

$$R_1(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) \equiv \int_0^\infty ds s^{\frac{l_1+l-2}{2}} L_{n_1}^{l_1+\frac{1}{2}}(s) L_n^{l+\frac{1}{2}}(s) \Psi'_{l_2 n_2}(\sqrt{s}) e^{-s}, \quad (7.41)$$

$$R_2(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) \equiv \int_0^\infty ds s^{\frac{l_1+l-1}{2}} L_{n_1}^{l_1+\frac{1}{2}}(s) L_n^{l+\frac{1}{2}}(s) \Psi''_{l_2 n_2}(\sqrt{s}) e^{-s}. \quad (7.42)$$

$$R_3(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) \equiv \int_0^\infty ds s^{\frac{l_1+l}{2}} L_{n_1}^{l_1+\frac{1}{2}}(s) L_n^{l+\frac{1}{2}}(s) \Psi'''_{l_2 n_2}(\sqrt{s}) e^{-s}. \quad (7.43)$$

Das Ergebnis der Zurückführung von Gl. (31) auf die Grundformen Gl. (38, 42-43)

lautet dann schliesslich

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int d\vec{u} B_{l_1 n_1}(\vec{u}) \partial_{u_i u_j} B_{ln}(\vec{u}) \partial_{u_i u_j} \left(P_{l_2}(\mu) \Psi_{l_2 n_2}(u) \right) e^{-u^2} \\
= & \left\{ (2n+l-1)(2n+l) R_2(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) \right. \\
& - (2n+2l+1)(4n+2l-3) R_2(l_1, n_1, l, n-1, l_2, n_2) \\
& + (2n+2l+1)(2n+2l-1) R_2(l_1, n_1, l, n-2, l_2, n_2) \left. \right\} \times P(l_1, l, l_2) \\
& + \left\{ (2n+l) R_1(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) - (2n+2l+1) R_1(l_1, n_1, l, n-1, l_2, n_2) \right\} \times 2P(l_1, l, l_2) \\
& - l(l+1) P(l_1, l, l_2) R_1(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) \\
& - l_2(l_2+1) P(l_1, l, l_2) \times \\
& \left\{ (2n+l) R_0(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) - (2n+2l+1) R_0(l_1, n_1, l, n-1, l_2, n_2) \right\} \\
& + \left\{ l l_2(l l_2+1) P(l_1, l, l_2) \right. \\
& - l(l-1) \sum_{k' \geq 0} (2l_2 - 4k' - 3) P(l_1, l, l_2 - 2k' - 2) \\
& - l_2(l_2-1) \sum_{k \geq 0} (2l - 4k - 3) P(l_1, l - 2k - 2, l_2) \\
& + 2 \sum_{k, k' \geq 0} (2l - 4k - 3)(2l_2 - 4k' - 3) P(l_1, l - 2k - 2, l_2 - 2k' - 2) \left. \right\} \times R_0(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) \\
& + 2 \left\{ \sum_{k, k' \geq 0} (2l - 4k - 1)(2l_2 - 4k' - 1) P(l_1, l - 2k - 1, l_2 - 2k' - 1) \right. \\
& - l l_2 P(l_1, l, l_2) \\
& - l \sum_{k' \geq 0} (2l_2 - 4k' - 3) P(l_1, l, l_2 - 2k' - 2) \\
& - l_2 \sum_{k \geq 0} (2l - 4k - 3) P(l_1, l - 2k - 2, l_2) \\
& - \sum_{k, k' \geq 0} (2l - 4k - 3)(2l_2 - 4k' - 3) P(l_1, l - 2k - 2, l_2 - 2k' - 2) \left. \right\} \times \\
& \left\{ - (2n+l-1) R_0(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) + (2n+2l+1) R_0(l_1, n_1, l, n-1, l_2, n_2) \right. \\
& + (2n+l-1) R_1(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) - (2n+2l+1) R_1(l_1, n_1, l, n-1, l_2, n_2) \left. \right\} .
\end{aligned} \tag{7.44}$$

Der Selbststossoperator der Elektronen Gl. (26) enthält auch ein Integral der Form

$$\int d\vec{u} B_{l_1 n_1}(\vec{u}) \partial_{u_i} B_{ln}(\vec{u}) \partial_{u_i} \Phi(\vec{u}) e^{-u^2} , \tag{7.45}$$

wobei

$$\partial_{u_i} B_{ln}(\vec{u}) \partial_{u_i} \Phi(\vec{u}) = \sum_{l_2, n_2 \geq 0} \left\{ P_l(\mu) P_{l_2}(\mu) \partial_u b_{ln}(u) \partial_u \Phi_{l_2 n_2}(u) + \frac{1}{u^2} \partial_\theta P_l(\mu) \partial_\theta P_{l_2}(\mu) b_{ln}(u) \Phi_{l_2 n_2}(u) \right\} .$$

Die zu Gl. (44) analoge Formel für Gl. (45) lautet

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int d\vec{u} B_{l_1 n_1}(\vec{u}) \partial_{u_i} B_{ln}(\vec{u}) \partial_{u_i} \left(P_{l_2}(\mu) \Phi_{l_2 n_2}(u) \right) e^{-u^2} \\ &= P(l_1, l, l_2) \times \\ & \left\{ (2n + l) R_3(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) - (2n + 2l + 1) R_3(l_1, n_1, l, n - 1, l_2, n_2) \right. \\ & \quad + 2 \left[(2n + l) R_2(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) - (2n + 2l + 1) R_2(l_1, n_1, l, n - 1, l_2, n_2) \right] \\ & \quad - (l_2(l_2 + 1) + 2) \times \\ & \quad \left[(2n + l) R_1(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) - (2n + 2l + 1) R_1(l_1, n_1, l, n - 1, l_2, n_2) \right] \\ & \quad + 2l_2(l_2 + 1) \times \\ & \quad \left. \left[(2n + l) R_1(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) - (2n + 2l + 1) R_1(l_1, n_1, l, n - 1, l_2, n_2) \right] \right\} \\ & + \left\{ \sum_{k, k' \geq 0} (2l - 4k - 1)(2l_2 - 4k' - 1) P(l_1, l - 2k - 1, l_2 - 2k' - 1) \right. \\ & \quad - l l_2 P(l_1, l, l_2) \\ & \quad - l \sum_{k' \geq 0} (2l_2 - 4k' - 3) P(l_1, l, l_2 - 2k' - 2) \\ & \quad - l_2 \sum_{k \geq 0} (2l - 4k - 3) P(l_1, l - 2k - 2, l_2) \\ & \quad - \sum_{k, k' \geq 0} (2l - 4k - 3)(2l_2 - 4k' - 3) P(l_1, l - 2k - 2, l_2 - 2k' - 2) \left. \right\} \times \\ & \left\{ R_2(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) + 2 R_1(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) - l_2(l_2 + 1) R_0(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2) \right\} . \end{aligned} \tag{7.46}$$

Die radialen Integrale Gln. (42, 40, 41, 43) werden im Segment *ELEL* von *QUADRAD* ausgewertet und befinden sich in den 6-d-Feldern

$$RAD0(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2), \dots, RAD3(l_1, n_1, l, n, l_2, n_2)$$

Sie sind symmetrisch in bezug auf die Operation ($l_1 \leftrightarrow l \wedge n_1 \leftrightarrow n$); die letzten beiden Argumente betreffen die Indizes von Ψ . Die Integranden selbst sind durch die

Routinen

$RAD0X, \dots, RAD3X$

repräsentiert.

Die Winkelintegrale aus den 3 Legendrepolyomen erledigt *QUADANG*; sie stehen in dem 3-d-Feld $P(l_1, l_2, l_3)$.

Die Ψ_{ln} und deren Ableitungen werden, abgesehen von dem 4π -Vorfaktor, durch die Routinen

$PSIX, DPSIX, DDPSIX, DDDPSIX$.

realisiert. *SETEE* baut den Selbststoßoperator in der Form

$$\frac{1}{\pi^2} \left[\int d\vec{u} f_e(\vec{u}) \partial_{u_i} B_{ln}(\vec{u}) \partial_{u_i} \Phi(\vec{u}) + \frac{1}{4} \int d\vec{u} f_e(\vec{u}) \partial_{u_i u_j} B_{ln}(\vec{u}) \partial_{u_i u_j} \Psi(\vec{u}) \right] .$$

zusammen (vgl. Gl. (26)). In *LDCOLL* (Segment *LD1*) wird er mit

$$(2l+1) \frac{n!}{(n+l+\frac{1}{2})!}$$

versehen und in dem 6-d-Feld $EE(l, n, l_1, l_2, n_2)$ abgespeichert. Die letzten 4 Indizes betreffen die Bilinearität in den c_{ln} . Multiplikation mit $\frac{1}{v_{th}^3}$ findet erst in *EENW2* (Segment *LD1*) statt.

LITERATURVERZEICHNIS

1. J.Wesson, Tokamaks, Clarendon Press, Oxford (1987).
2. R.Chodura, P.Lasma Flow in the Sheath and the Presheath of a Scrape-off Layer, Physics of Plasma-Wall Interactions in Contolled Fusion, D.E.Post and R.Behrish (editors), Plenum Publishing Corporation (1986).
3. L.Spitzer,R.Härm, Phys.Rev. **89**, 977 (1953).
4. B.A.Trubnikov, Reviews of Plasma Physics (M.A.Leontovich ed.), Vol.1,Consultants Bureau New York (1965).
5. D.Burnett, Proc. London Math. Soc. **39**,385 (1935).
6. S.I.Braginskii, Reviews of Plasma Physics (M.A.Leontovich ed.), Vol.1,Consultants Bureau New York (1965).
7. S.Jorna,L.Wood, J.Plasma Physics **38**, 317 (1987).
8. L.Spitzer, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers New York (1956).
9. H.Dreicer, Phys.Rev. **115**, 238 (1959).
10. H.Dreicer, Phys.Rev. **117**, 329 (1960).
11. M.N.Rosenbluth,W.Mac.Donald,D.Judd, Phys.Rev. **107**, 1 (1957).
12. B. Samuel Tanenbaum, Plasma Physics, McGraw-Hill Physical and Quantum Electronics Series.
13. J.P.Matte,J.Virmont, Phys.Rev.Lett. **49**, 1936 (1982).
14. J.F.Luciani,P.Mora,R.Pellat, Phys.Fluids **28**, 835 (1985).
15. S.A.Khan,T.D.Ronglien, Phys. Fluids **24**, 1442 (1981).
16. D.Shvarts,J.Delletrez,,R.L.Mc.Crory,C.P.Verdon, Phys.Rev.Lett. **47**, 247 (1981).

17. T.Takizuka,K.Tani,M.Azumi,K.Shimizu, J.Nucl.Mater. **128,129**, 104 (1984).
18. M.H.Shirazian,L.C.Steinhauser, Phys.Fluids **24**, 843 (1981).
19. R.Chodura, 8th Europhysics Conf. on Computational Physics Computing in Plasma Physics, Garmisch, Germany 1986
20. B.J.Braams, Computational Studies in Tokamak Equilibrium and Transport, PhD-Thesis, Utrecht, Netherlands (1986).
21. D.Düchs, private communication
22. W.Heisenberg, der Teil und das Ganze, dtv.
23. I.S.Gradshteyn, I.M.Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, New York (1980).

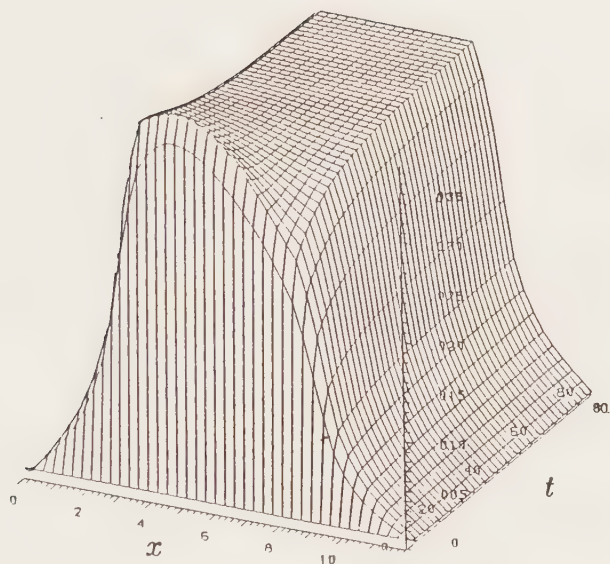


Fig. 1.1. Q_e gegen x und t ursprüngliche Basis

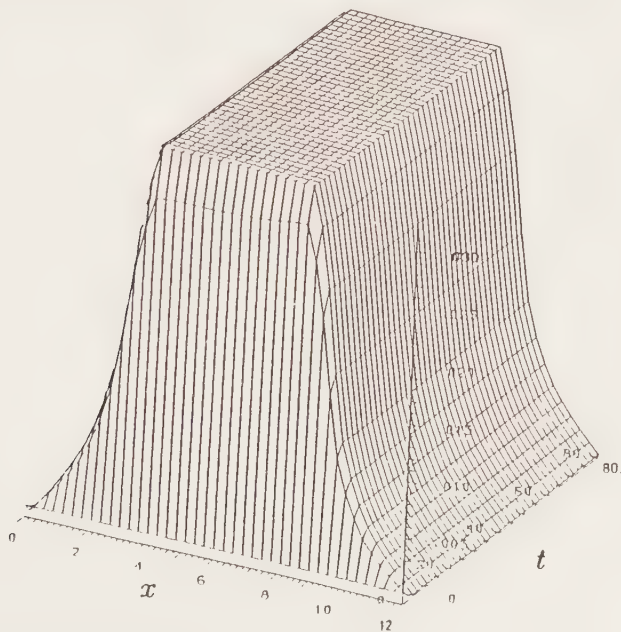


Fig. 1.2. $Q_e(t, x)$ gegen x und t angepasste Basis

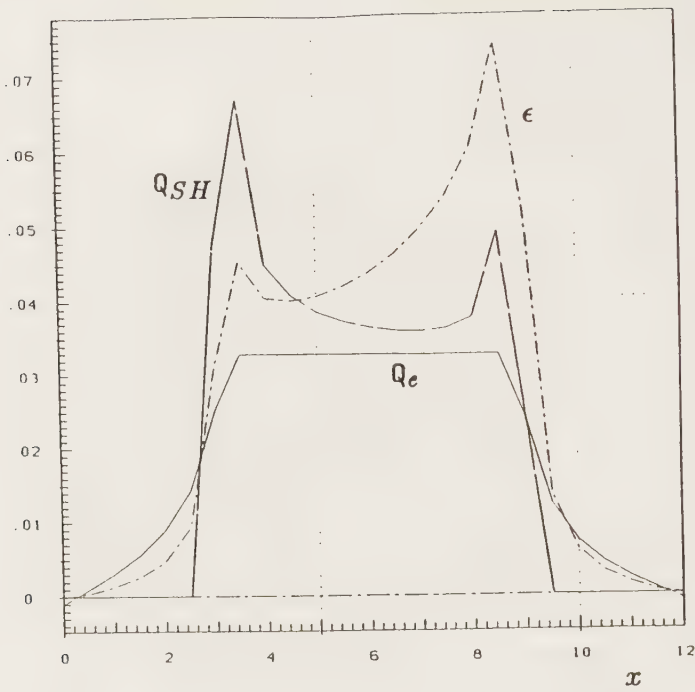


Fig. 1.3. Q_e, Q_{SH}, ϵ gegen x bei $t = 80$ ursprüngliche Basis

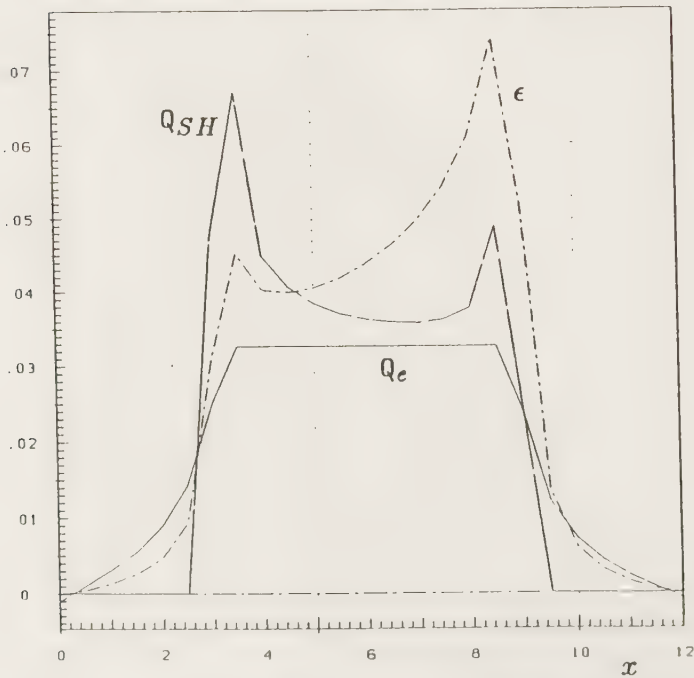


Fig. 1.4. Q_e, Q_{SH}, ϵ gegen x bei $t = 80$ angepasste Basis

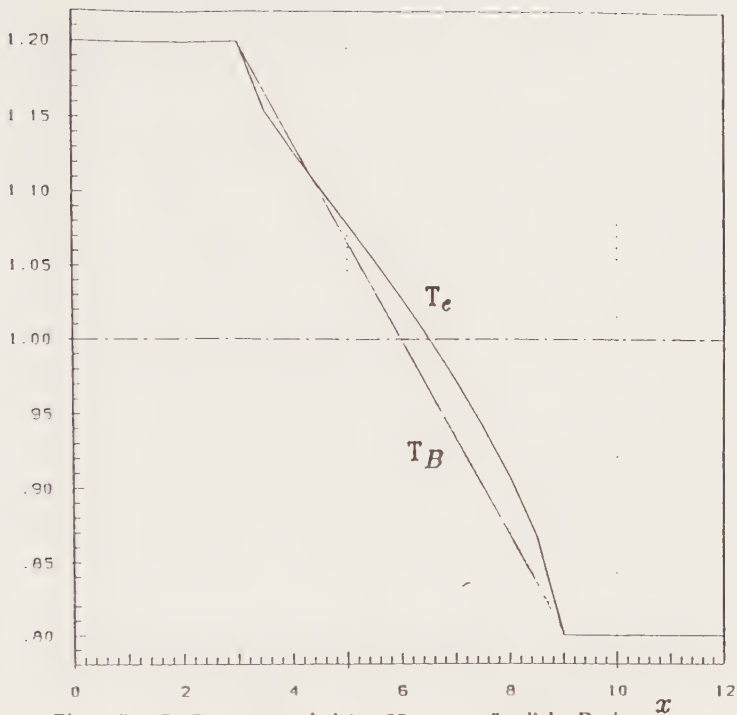


Fig. 1.5. T_e, T_B gegen x bei $t = 80$ ursprüngliche Basis

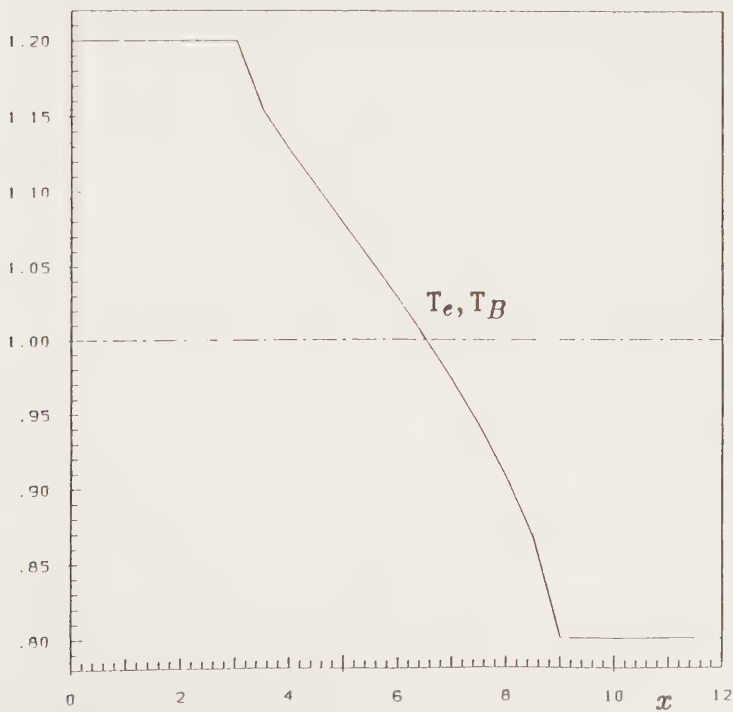


Fig. 1.6. T_e, T_B gegen x bei $t = 80$ angepasste Basis

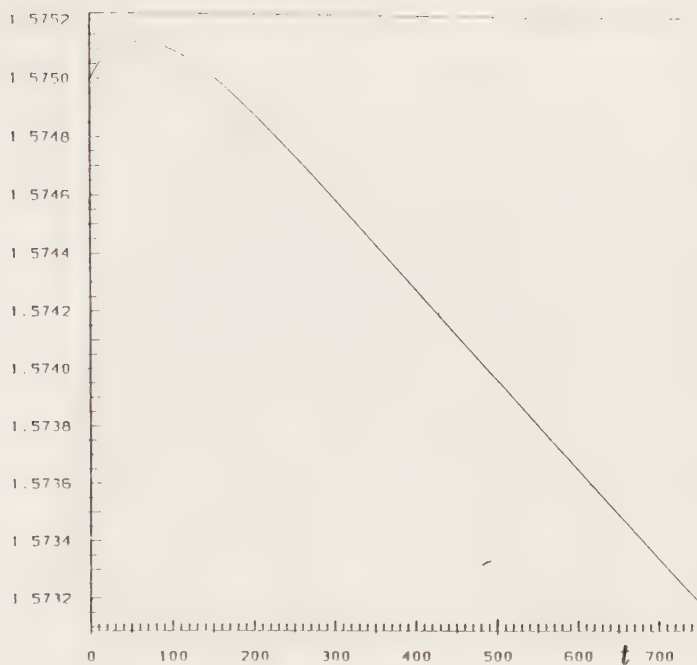


Fig. 2.1. $\Phi_e(t)$ gegen t komplette Selbstwechselwirkung

Nullpunkt der Ordinate willkürlich

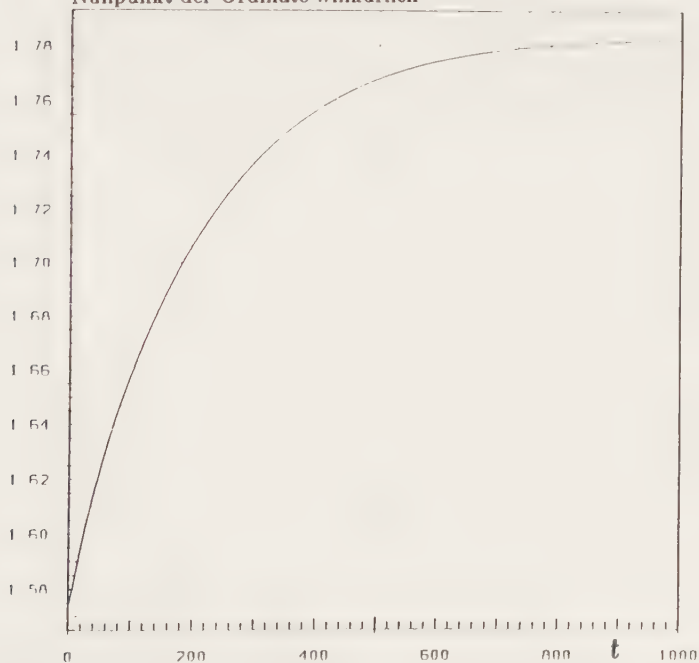


Fig. 2.2. $\Phi_e(t)$ gegen t Stöße nur mit isotropem Anteil

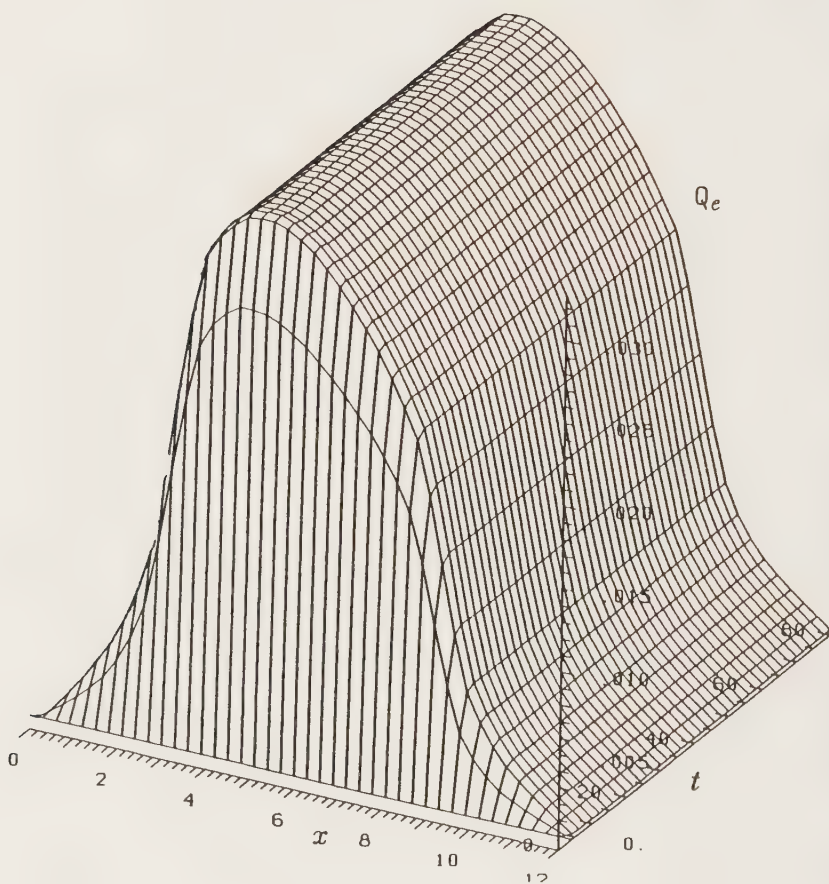


Fig. 2.9. Q_e gegen x und t

$T_{l/r} = 1.2/0.8$ über 6λ , $J_e = 0$

maxwellsche Feldteilchen mit Basistemperatur

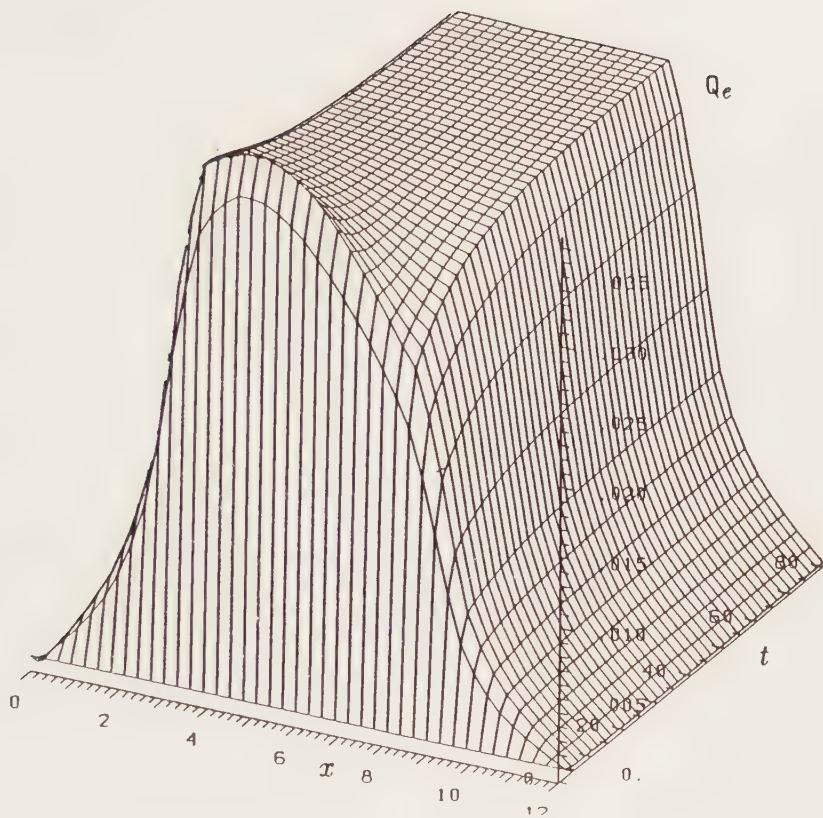


Fig. 2.4. Q_e gegen x und t

$T_{l/r} = 1.2/0.8$ über 6λ , $J_e = 0$

volle Selbstwechselwirkung: Feldteilchenverteilung = Testteilchenverteilung

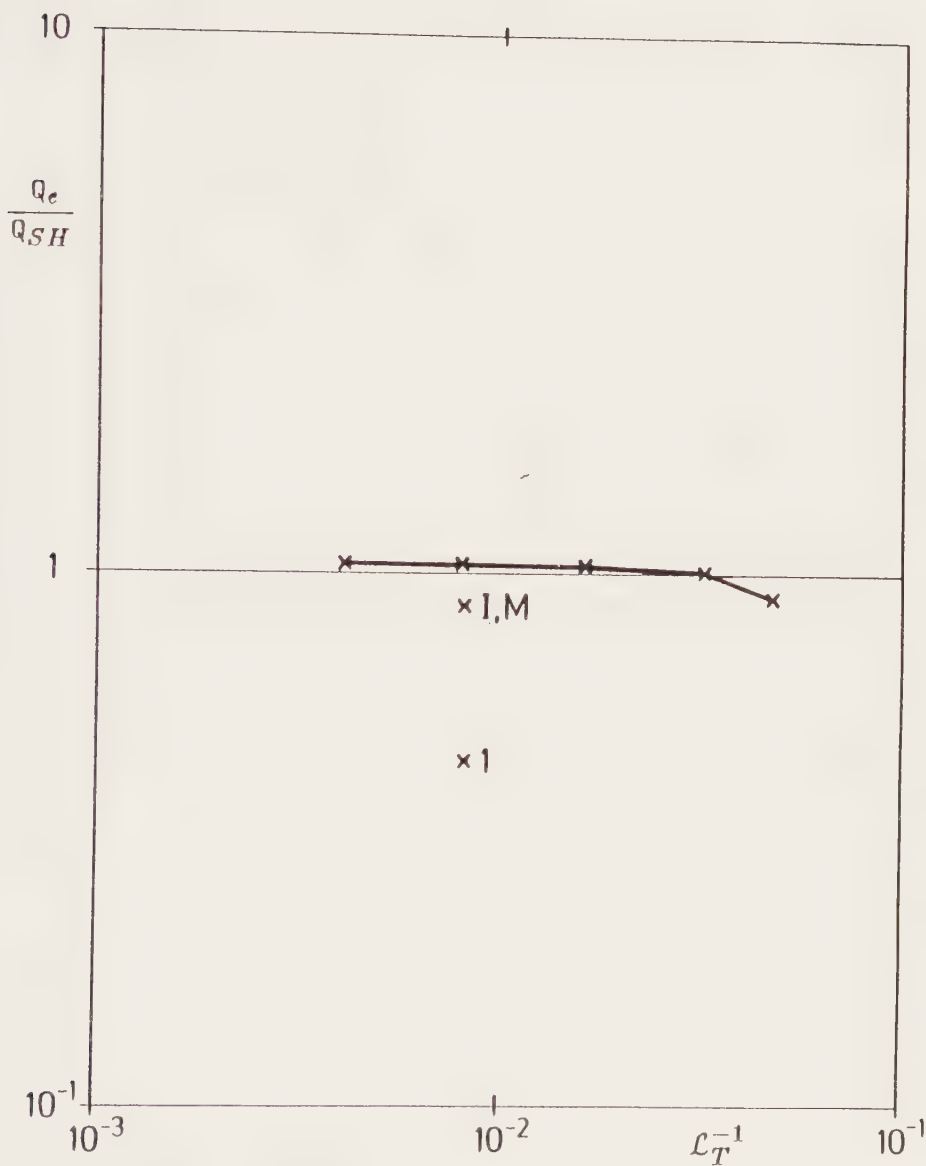


Fig. 3.1.1. Q_e/Q_{SH} gegen $\mathcal{L}_T^{-1}$

$I \Leftrightarrow$ isotrop, $M \Leftrightarrow$ maxwellisch, $1 \Leftrightarrow$ selbststossfrei, $n_{max} = 1$

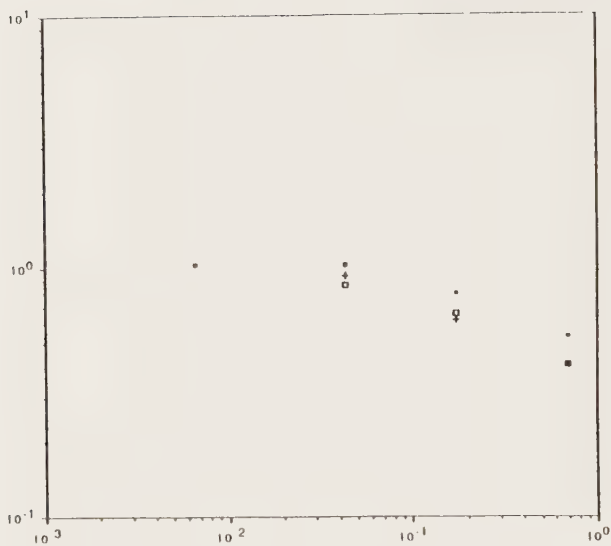


Fig. 3.2.1. Q_e/Q_{SH}^{min} gegen $\langle \mathcal{L}_T^{-1} \rangle$ Dichte ortsunabhängig

■ $\Leftrightarrow F$ ◊ $\Leftrightarrow I$ + $\Leftrightarrow M$

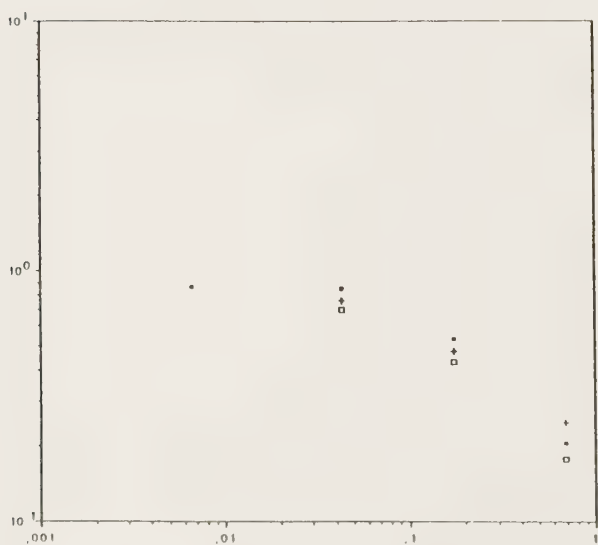


Fig. 3.2.2. Q_e/Q_{SH}^{max} gegen $\langle \mathcal{L}_T^{-1} \rangle$ Dichte ortsunabhängig

■ $\Leftrightarrow F$ ◊ $\Leftrightarrow I$ + $\Leftrightarrow M$

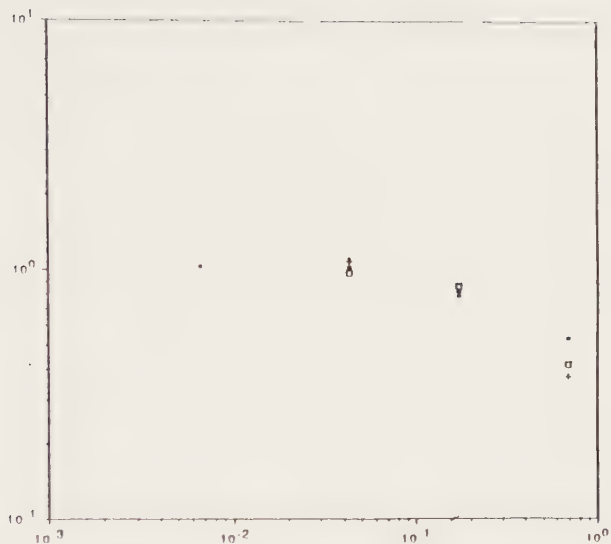


Fig. 3.2.3. Q_e/Q_{SH}^{min} gegen $\langle \mathcal{L}_T^{-1} \rangle$ Dichte ortsunabhängig

■ $\leftrightarrow n_{max} = 4$ + $\leftrightarrow n_{max} = 3$ □ $\leftrightarrow n_{max} = 2$

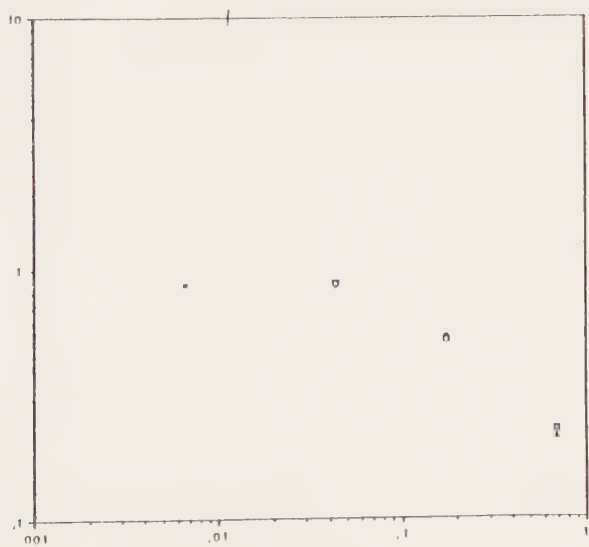


Fig. 3.2.4. Q_e/Q_{SH}^{max} gegen $\langle \mathcal{L}_T^{-1} \rangle$ Dichte ortsunabhängig

■ $\leftrightarrow n_{max} = 4$ + $\leftrightarrow n_{max} = 3$ □ $\leftrightarrow n_{max} = 2$

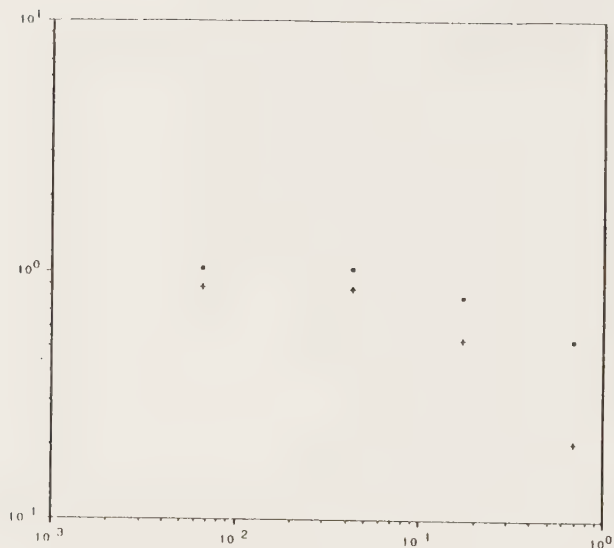


Fig. 3.2.5. Q_c/Q_{SH} gegen $\langle \mathcal{L}_T^{-1} \rangle$, Dichte ortsunabhängig

$$\blacksquare \leftrightarrow Q_{SH} = Q_{SH}^{\min} \quad + \leftrightarrow Q_{SH} = Q_{SH}^{\max}$$

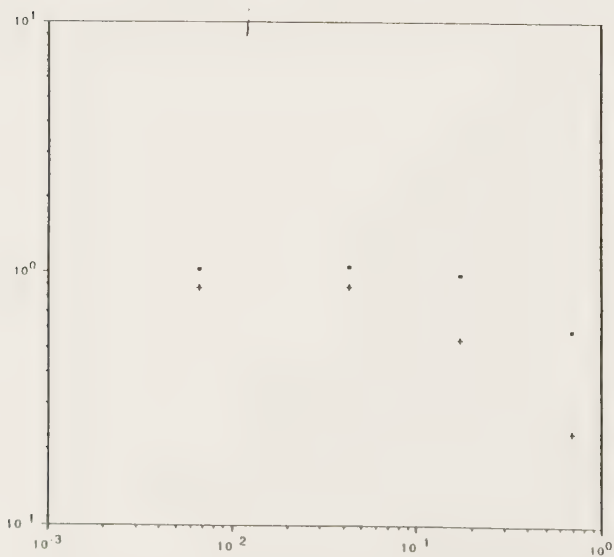


Fig. 3.2.6. Q_c/Q_{SH} gegen $\langle \mathcal{L}_T^{-1} \rangle$, Druck ortsunabhängig

$$\blacksquare \leftrightarrow Q_{SH} = Q_{SH}^{\min} \quad + \leftrightarrow Q_{SH} = Q_{SH}^{\max}$$

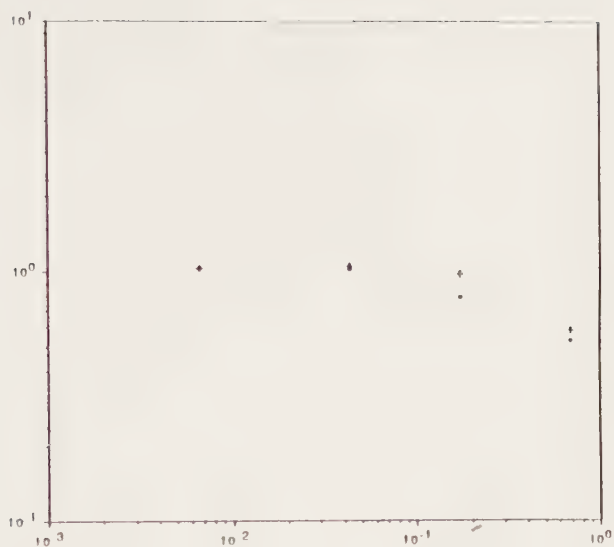


Fig. 3.2.7. Q_e/Q_{SH}^{min} gegen (L_T^{-1})

■ $\leftrightarrow$ Dichte ortsunabhängig + $\leftrightarrow$ Druck ortsunabhängig

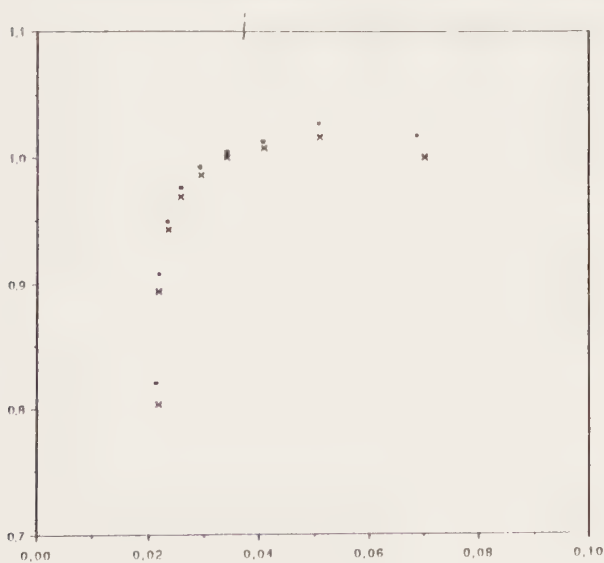


Fig. 3.2.8. Q_e/Q_{SH} gegen L_T^{-1} $T^l/r = 2/1$ $L_S = 16\lambda$

■ $\leftrightarrow h = \lambda$ × $\leftrightarrow h = \frac{1}{2}\lambda$

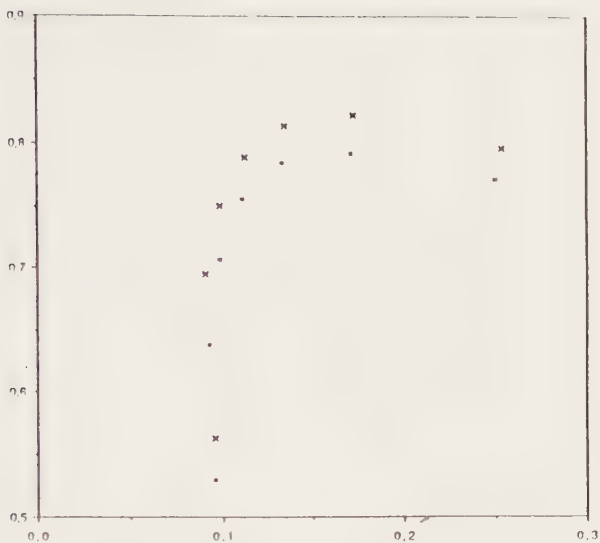


Fig. 3.2.9. Q_e/Q_{SH} gegen L_T^{-1} $T^{l/r} = 2/1$ $L_S = 4\lambda$

$\blacksquare \Leftrightarrow l_{max} = 3$ $\times \Leftrightarrow l_{max} = 1$

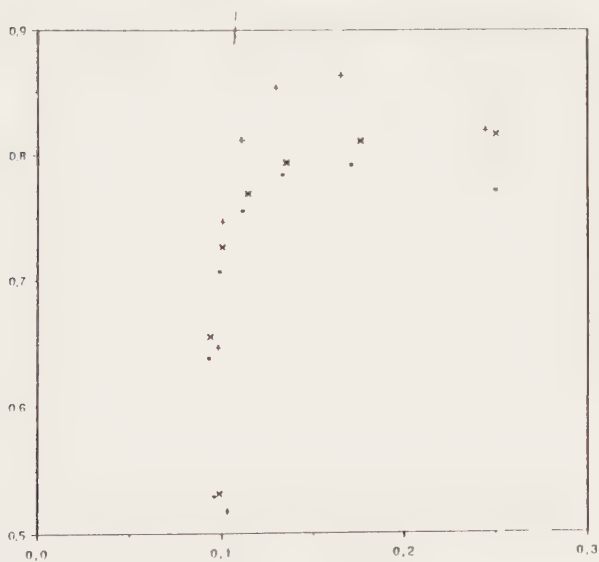


Fig. 3.2.10. Q_e/Q_{SH} gegen L_T^{-1} $T^{l/r} = 2/1$ $L_S = 4\lambda$

$\blacksquare \Leftrightarrow n_{max} = 4$ $\times \Leftrightarrow n_{max} = 3$ $+\Leftrightarrow n_{max} = 2$

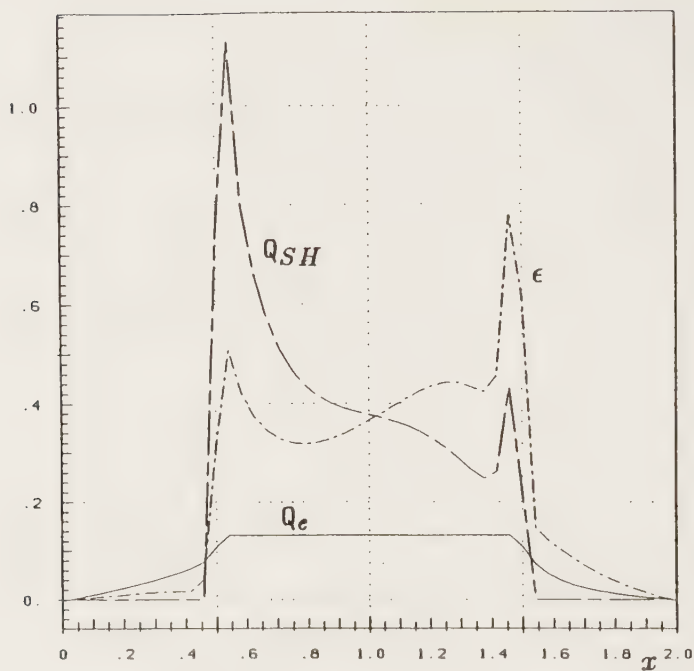


Fig. 3.2.11. Q_e, Q_{SH}, ϵ gegen x bei $\underline{t} = 10\tau$ ρ konstant

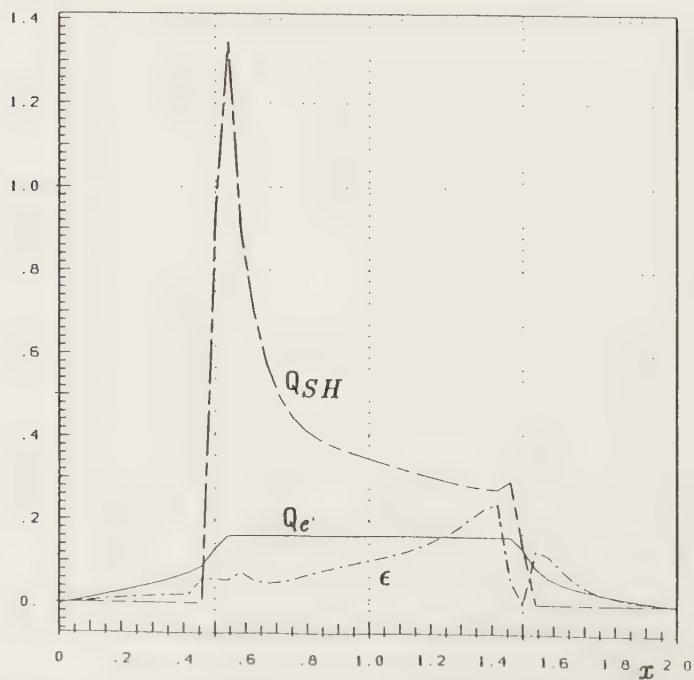


Fig. 3.2.12. Q_e, Q_{SH}, ϵ gegen x bei $\underline{t} = 4\tau$ p_e konstant

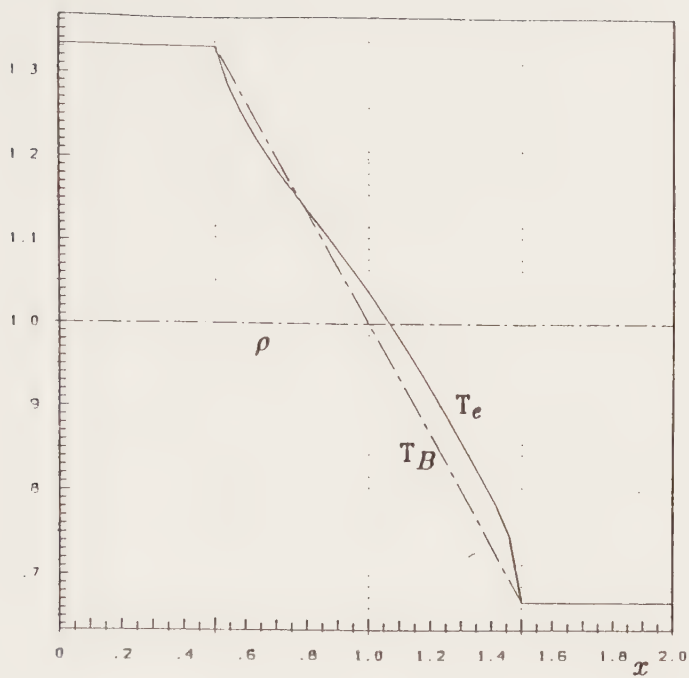


Fig. 3.2.13. T_e, T_B, ρ gegen x bei $t = 10\tau$ ρ konstant

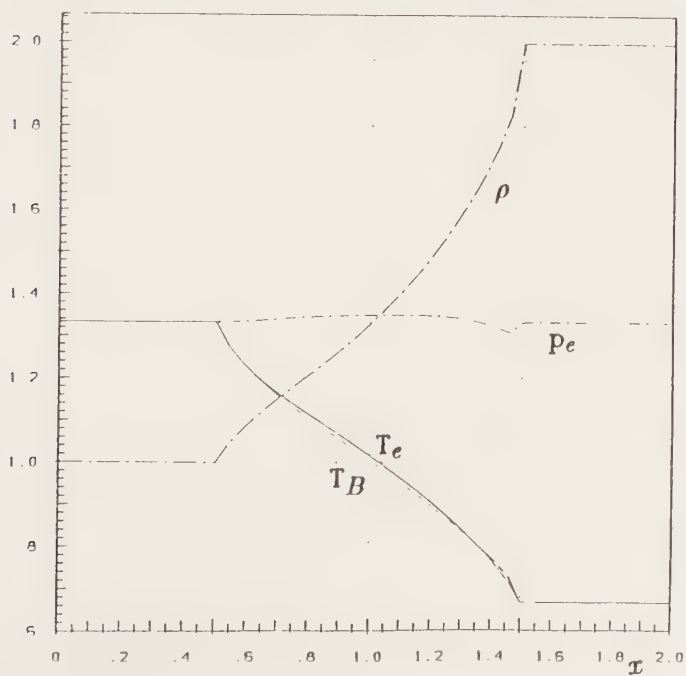


Fig. 3.2.14. T_e, T_B, ρ gegen x bei $t = 4\tau$ p_e konstant

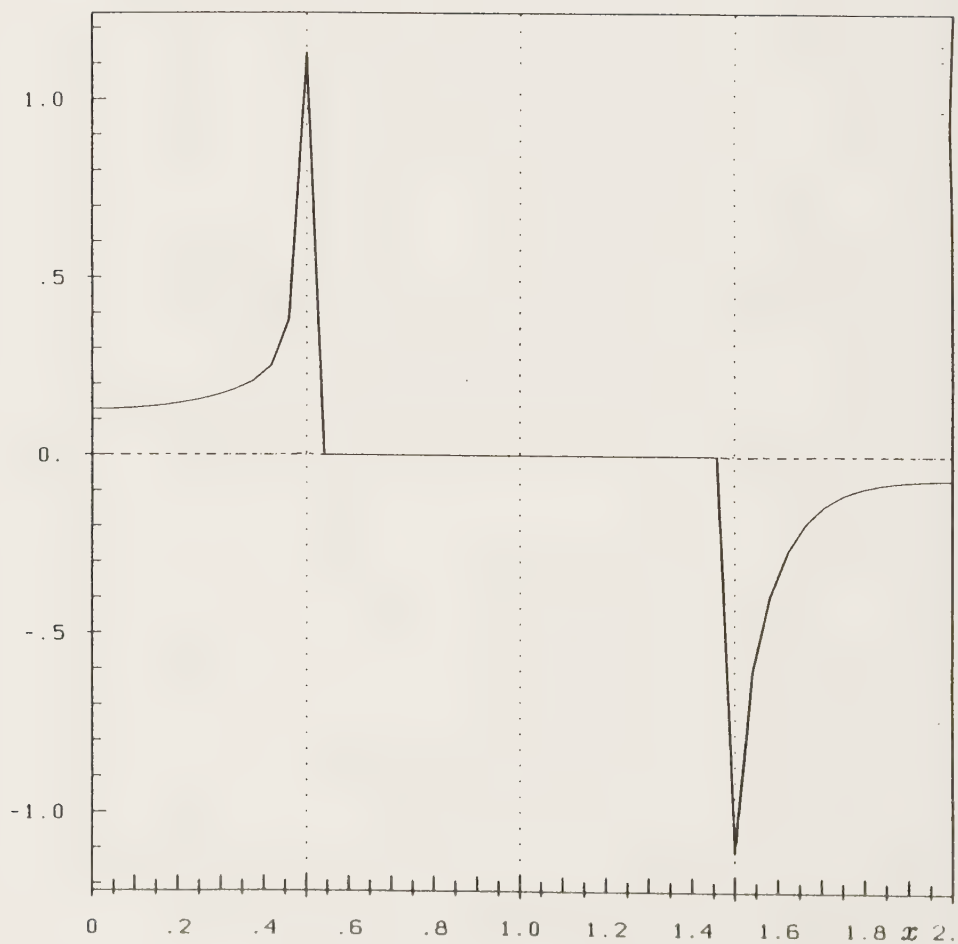


Fig. 3.2.15. S gegen x aus der Rechnung zu Fig. 3.2.11.

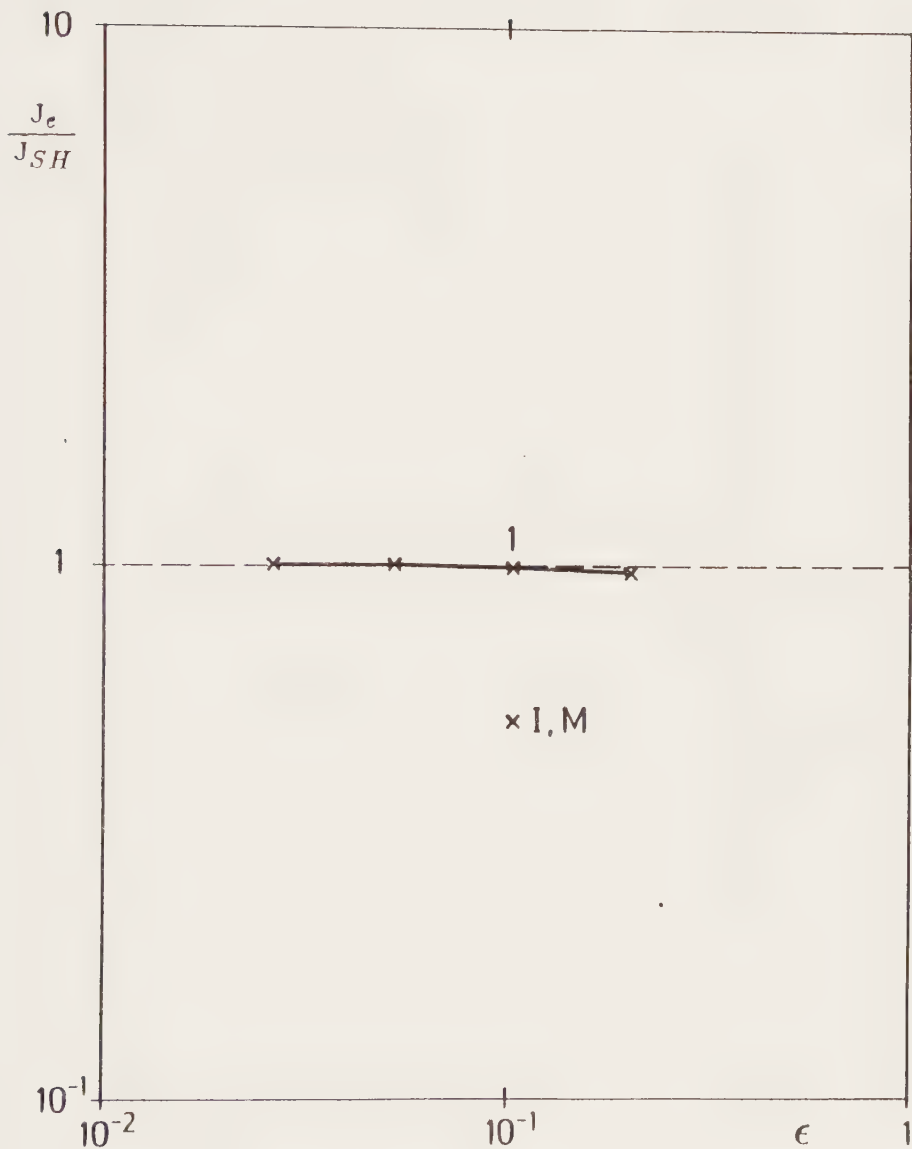


Fig. 4.1. J_e/J_{SH} gegen ϵ

$I \leftrightarrow$ isotrop, $M \leftrightarrow$ maxwellsch, $1 \leftrightarrow$ selbststossfrei, $n_{max} = 1$

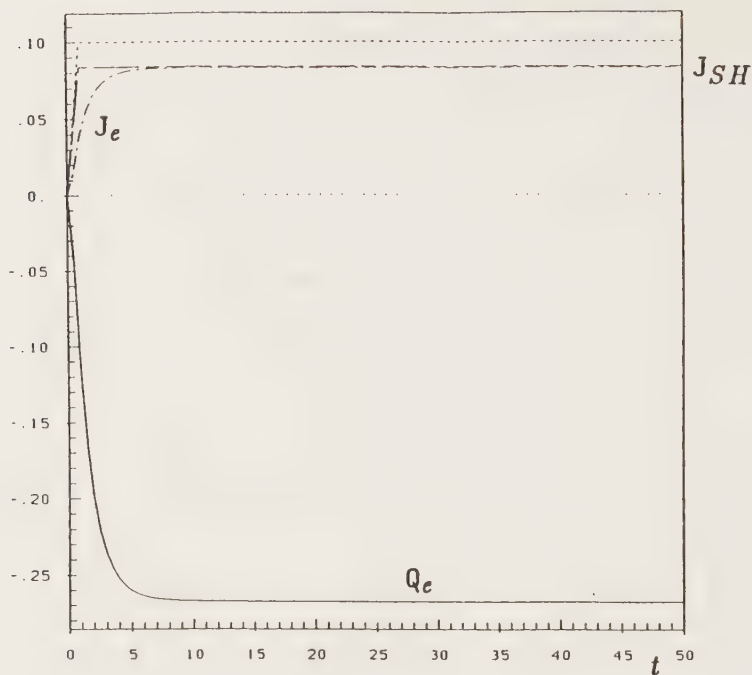


Fig. 4.2. Q_e, J_e, J_{SH} gegen t $\epsilon = 0.1$

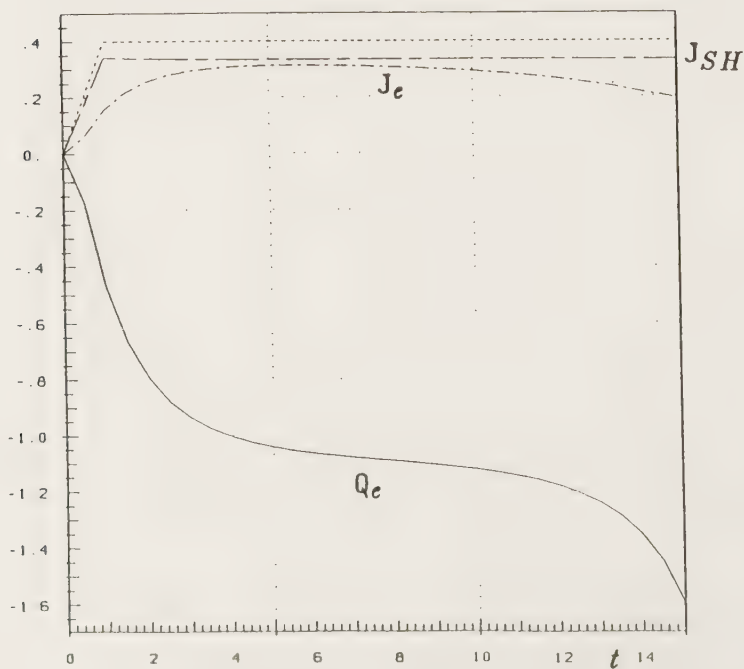


Fig. 4.3. Q_e, J_e, J_{SH} gegen t $\epsilon = 0.4$

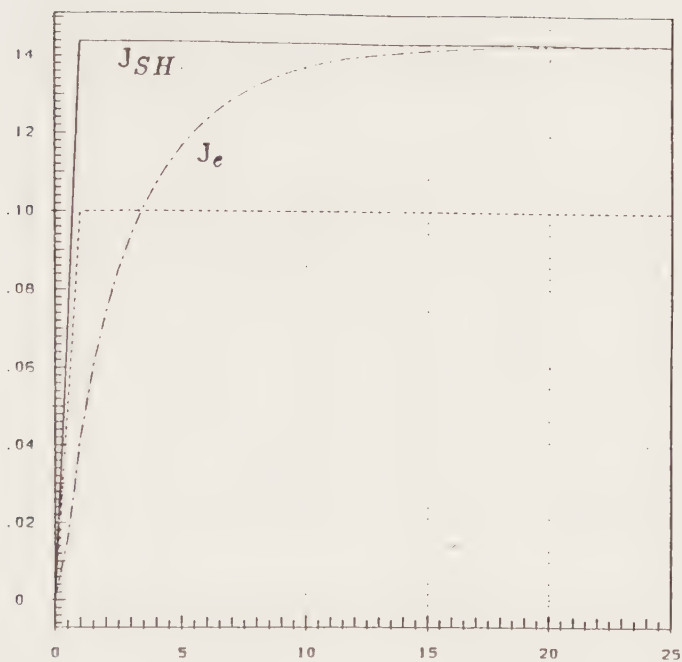


Fig. 5.1. J_e, J_{SH} , gegen t $\epsilon = 0.1$ selbststossfrei, $n_{max} = 1$

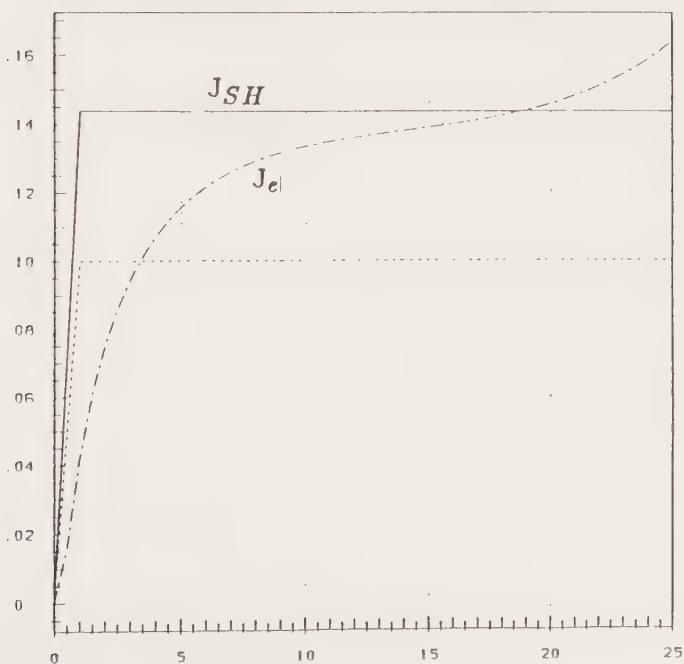


Fig. 5.2. J_e, J_{SH} , gegen t $\epsilon = 0.1$ selbststossfrei, $n_{max} = 4$

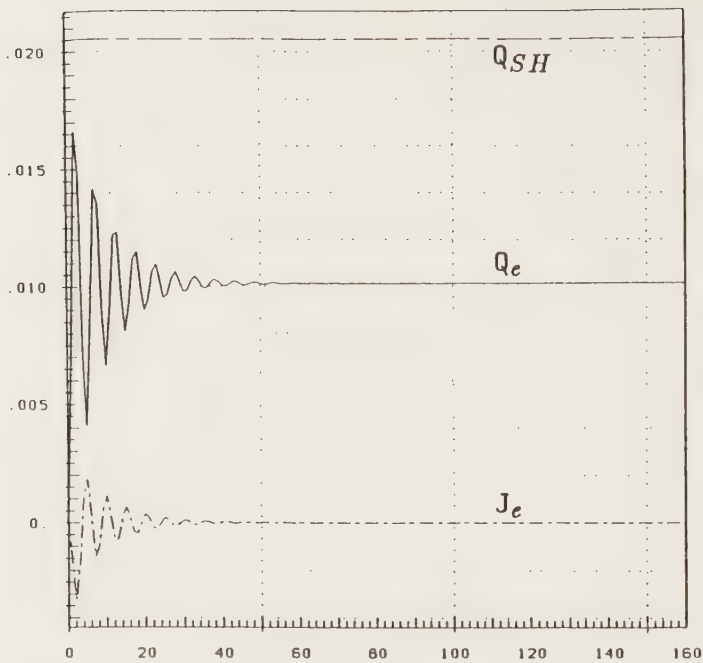


Fig. 5.3. Q_e, Q_{SH}, J_e gegen t $\mathcal{L}_T^{-1} = 0.008$ selbststossfrei, $n_{max} = 1$

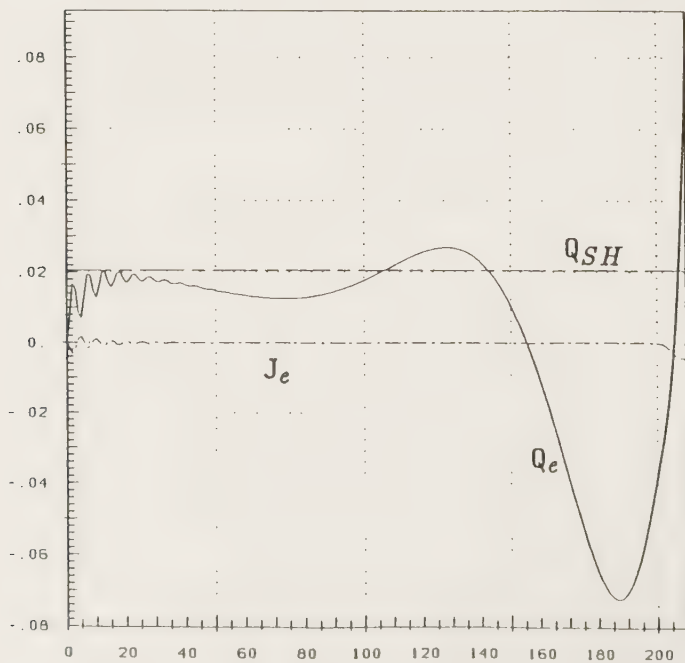


Fig. 5.4. Q_e, Q_{SH}, J_e gegen t $\mathcal{L}_T^{-1} = 0.008$ selbststossfrei, $n_{max} = 4$

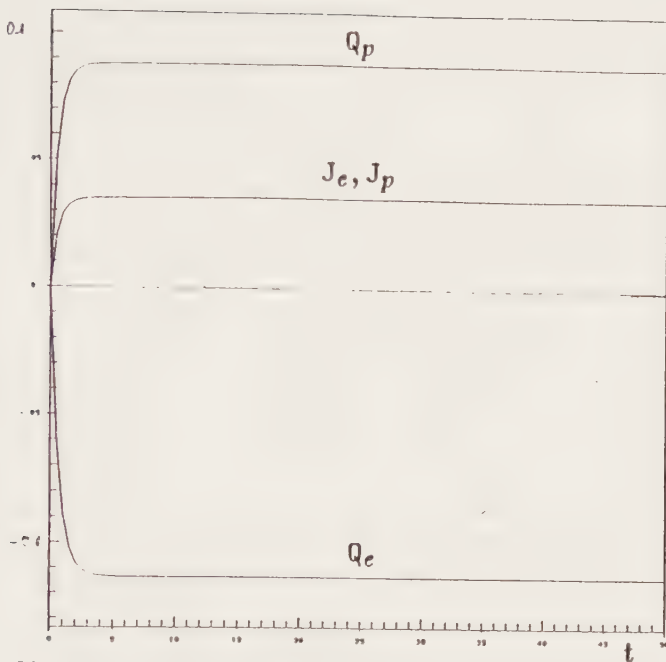


Fig. 6.1.1. Q_e, Q_p, J_e, J_p gegen t $\epsilon = 0.1$ $m_r = 1$

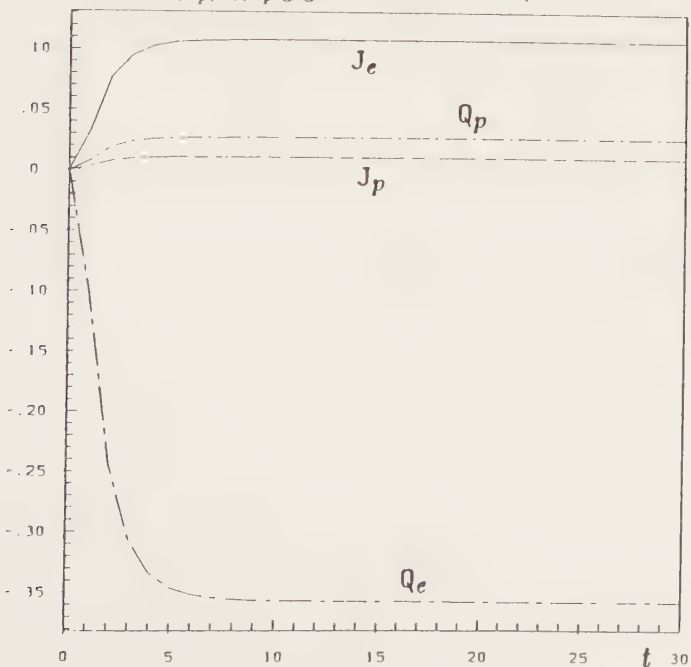


Fig. 6.1.2. Q_e, Q_p, J_e, J_p gegen t $\epsilon = 0.16$ $m_r = 0.1$

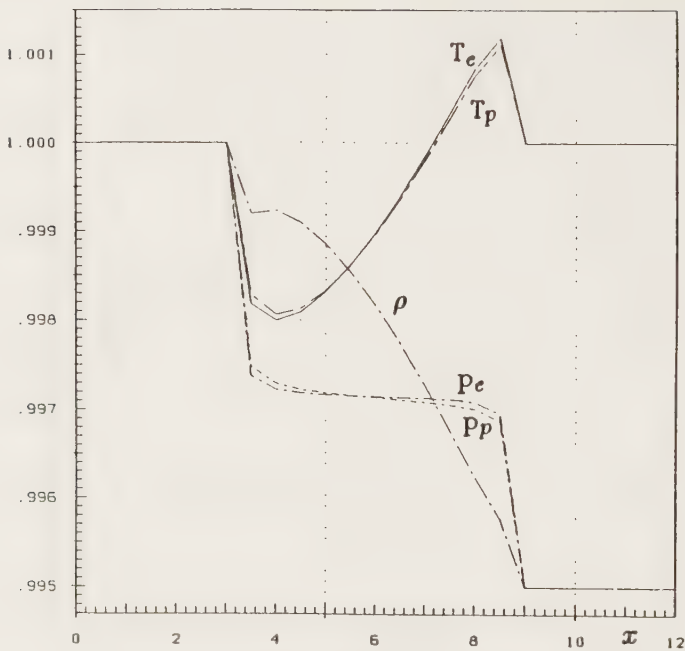


Fig. 6.2.1. T_e, T_p, p_e, p_p, ρ gegen x $t = 500$ $\Delta\rho = \frac{1}{2}\%$ über 6λ $m_r = 1$

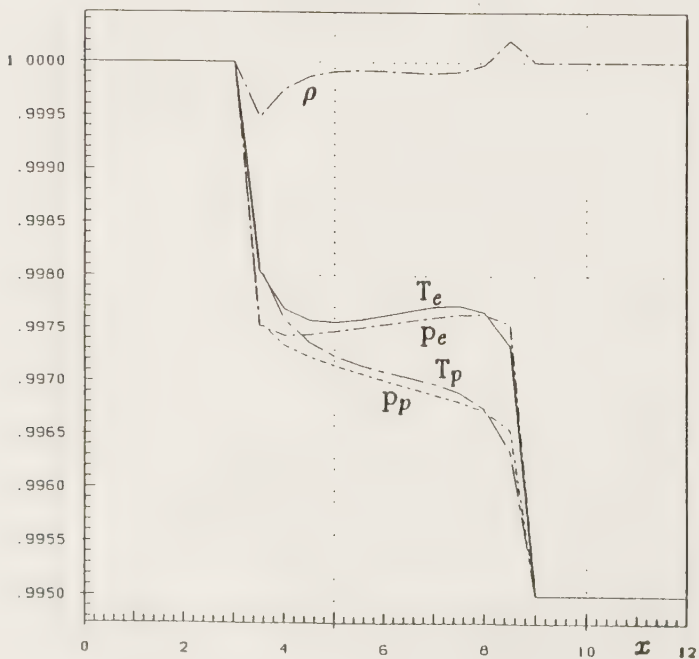


Fig. 6.2.2. T_e, T_p, p_e, p_p, ρ gegen x $t = 500$

$\Delta T_e, \Delta T_p = \frac{1}{2}\%$ über 6λ $m_r = 1$

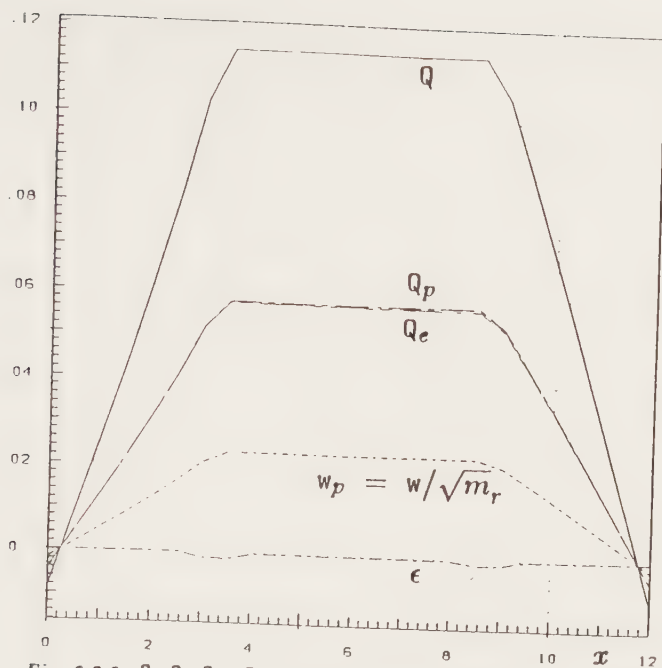


Fig. 6.2.3. $Q_e, Q_p, Q = Q_e + Q_p, w_p = w/\sqrt{m_r}, \epsilon$ gegen x $t = 500$

$\Delta \rho = \frac{1}{2}\%$ über 6λ $m_r = 1$

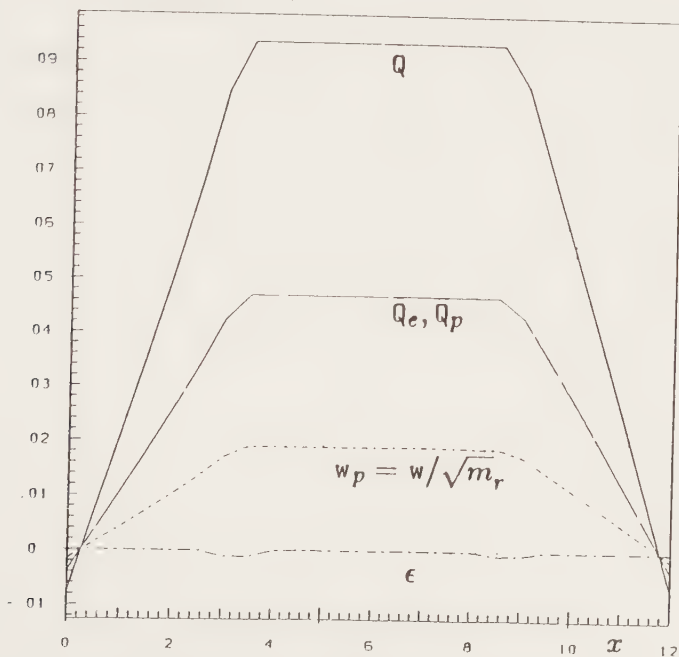


Fig. 6.2.4. $Q_e, Q_p, Q = Q_e + Q_p, w_p = w/\sqrt{m_r}, \epsilon$ gegen x $t = 500$

$\Delta T_e, \Delta T_p = \frac{1}{2}\%$ über 6λ $m_r = 1$

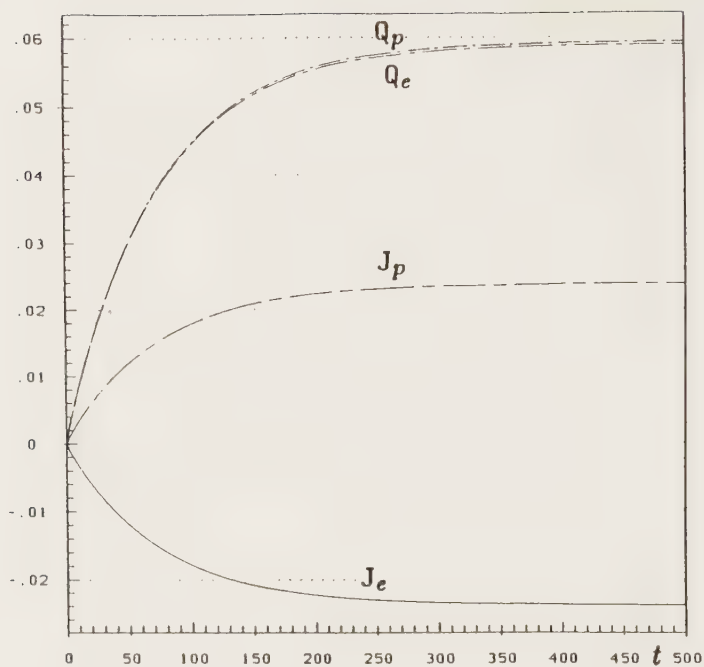


Fig. 6.2.5. Q_e, Q_p, J_e, J_p gegen t $x = 6$ $\Delta\rho = \frac{1}{2}\%$ über 6λ $m_r = 1$

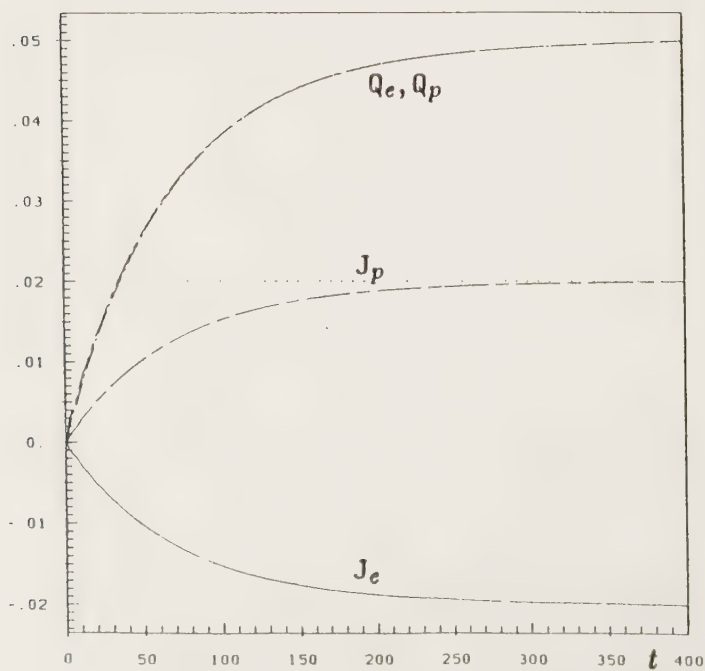


Fig. 6.2.6. Q_e, Q_p, J_e, J_p gegen t $x = 6$ $\Delta T_e, \Delta T_p = \frac{1}{2}\%$ über 6λ $m_r = 1$

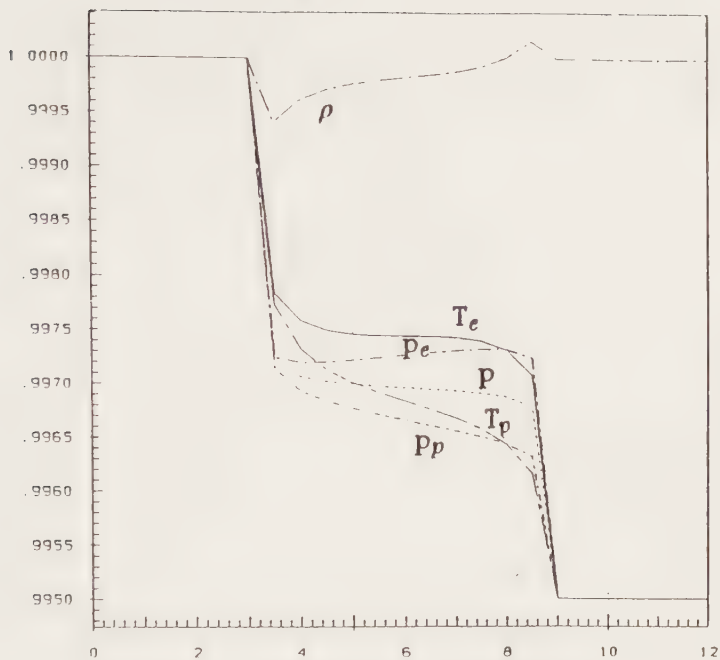


Fig. 6.2.7. $T_e, T_p, p_e, p_p, p = (p_e + p_p)/2, \rho$ gegen x $t = 500$

$\Delta T_e, \Delta T_p = \frac{1}{2}\%$ über 6λ $m_r = 0.1$

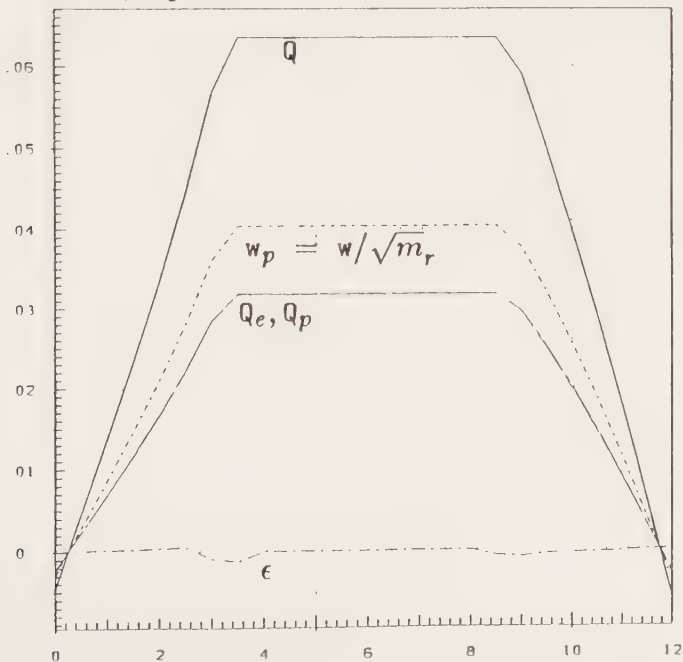


Fig. 6.2.8. $Q_e, Q_p, Q = Q_e + Q_p, w_p = w/\sqrt{m_r}, \epsilon$ gegen x $t = 500$

$\Delta T_e, \Delta T_p = \frac{1}{4}\%$ über 6λ $m_r = 0.1$

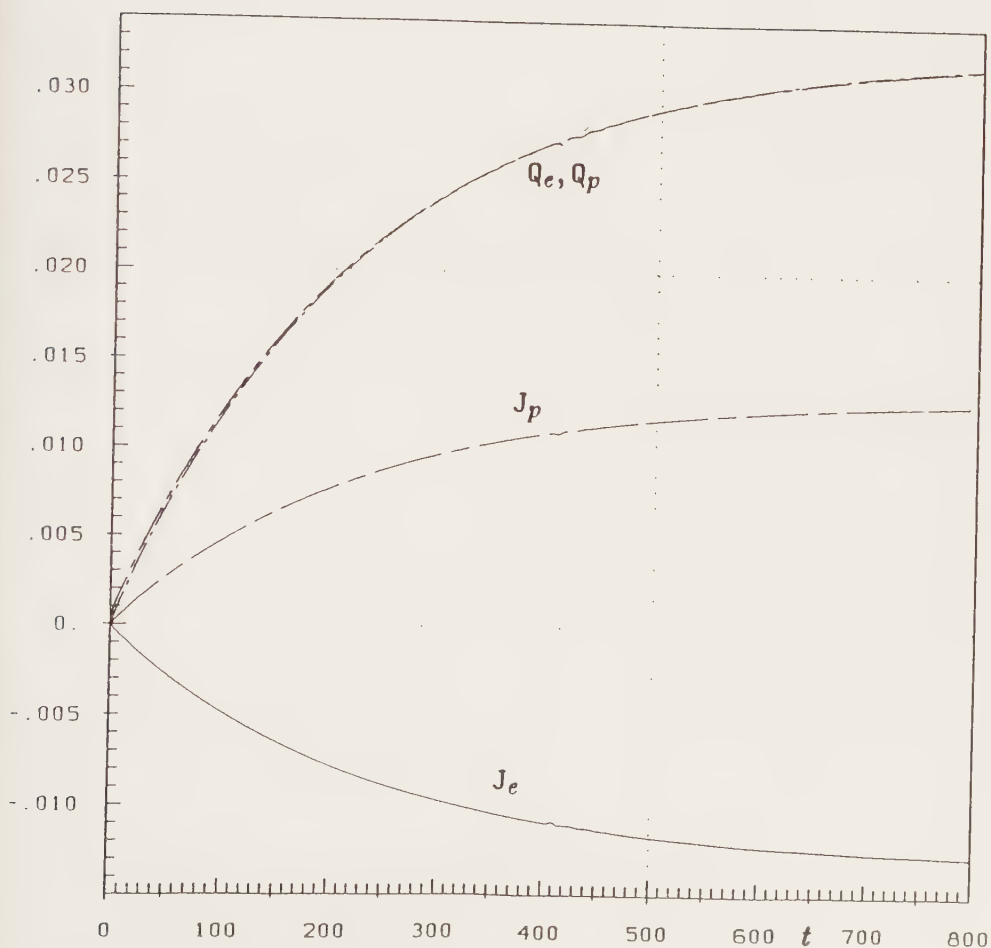


Fig. 6.2.9. Q_e, Q_p, J_e, J_p gegen t $x=6$ $\Delta T_e, \Delta T_p = \frac{1}{2}\%$ über 6λ $m_r = 0.1$

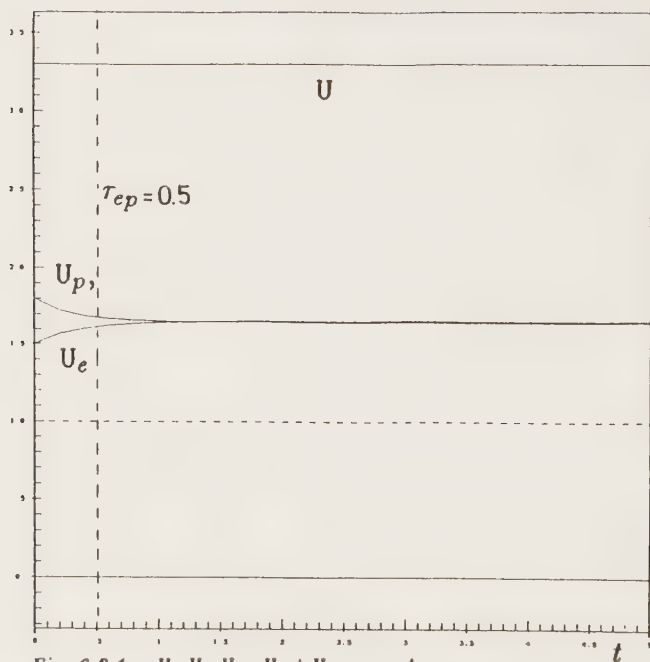


Fig. 6.3.1. $U_e, U_p, U = U_e + U_p$ gegen t

Verhältnis der Anfangstemperaturen $T_p/T_e = 1.2/1$ $m_r = 1$

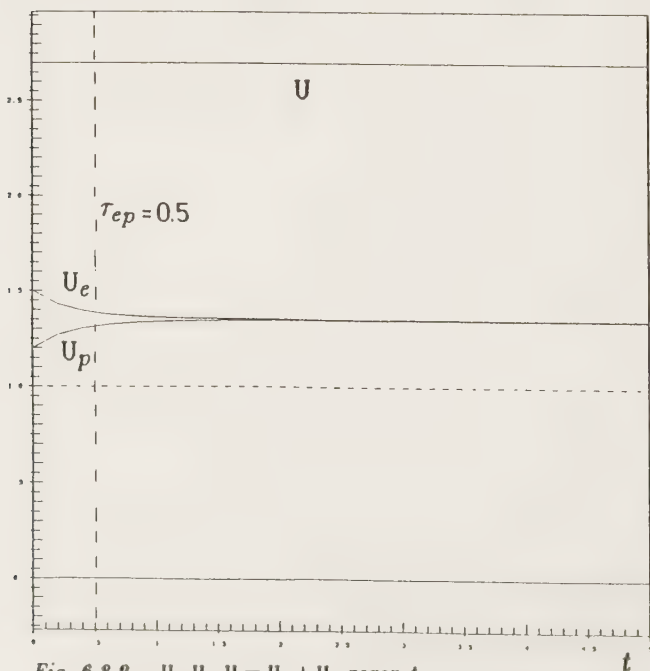


Fig. 6.3.2. $U_e, U_p, U = U_e + U_p$ gegen t

Verhältnis der Anfangstemperaturen $T_p/T_e = 0.8/1$ $m_r = 1$

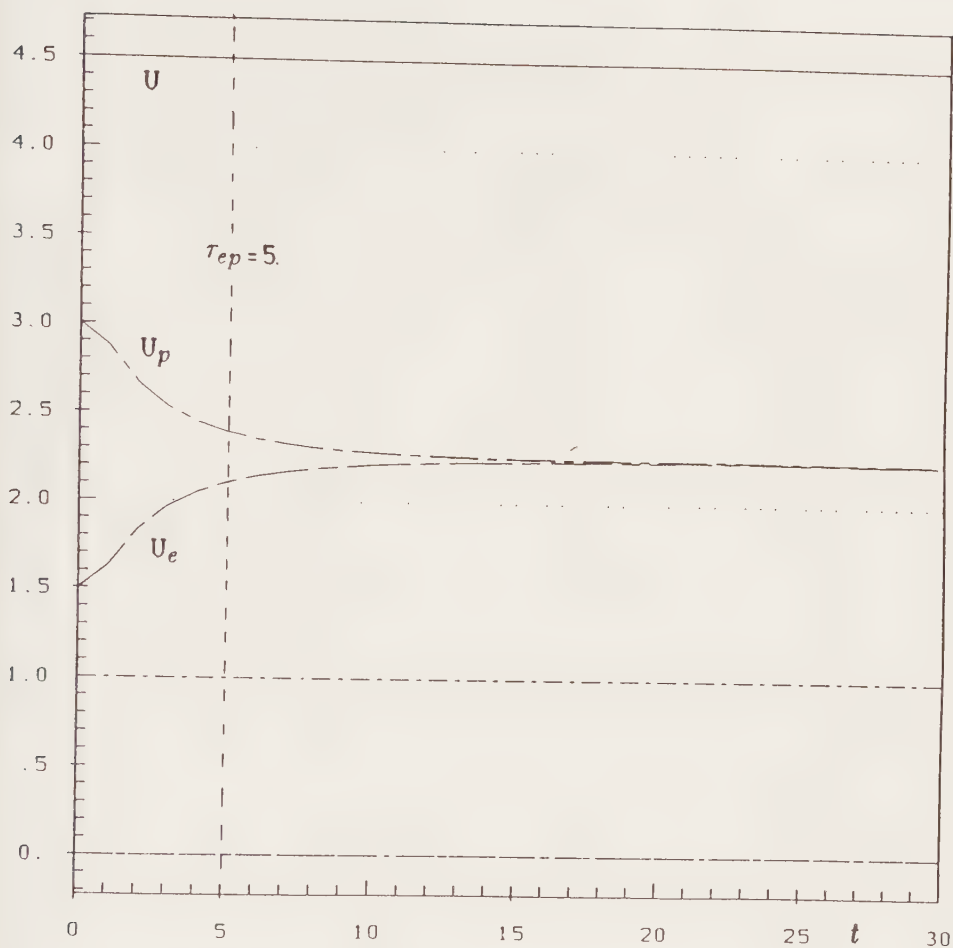


Fig. 6.3.3. $U_e, U_p, U = U_e + U_p$ gegen t

Verhältnis der Anfangstemperaturen $T_p/T_e = 2/1$ $m_r = 0.1$

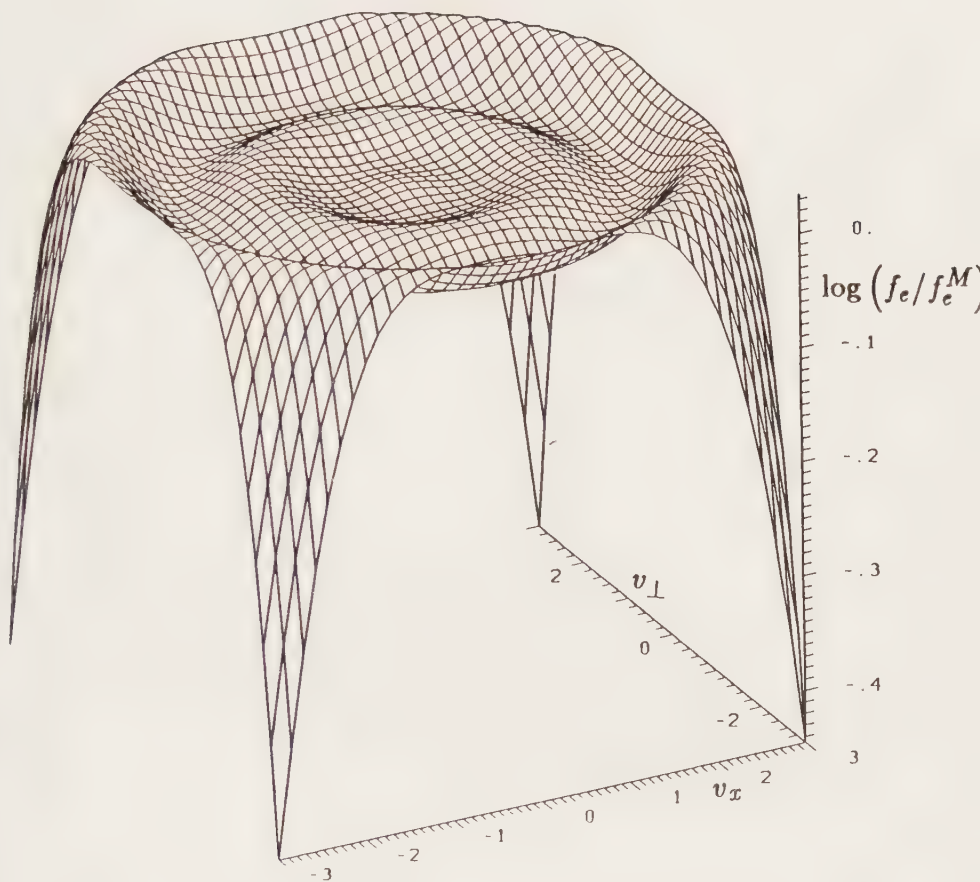


Fig. 6.3.4. $\log(f_e/f_e^M)$ gegen $v_x, v_\perp$ im thermischen Gleichgewicht

Verhältnis der Anfangstemperaturen $T_p/T_e = 2/1$ $m_r = 0.1$

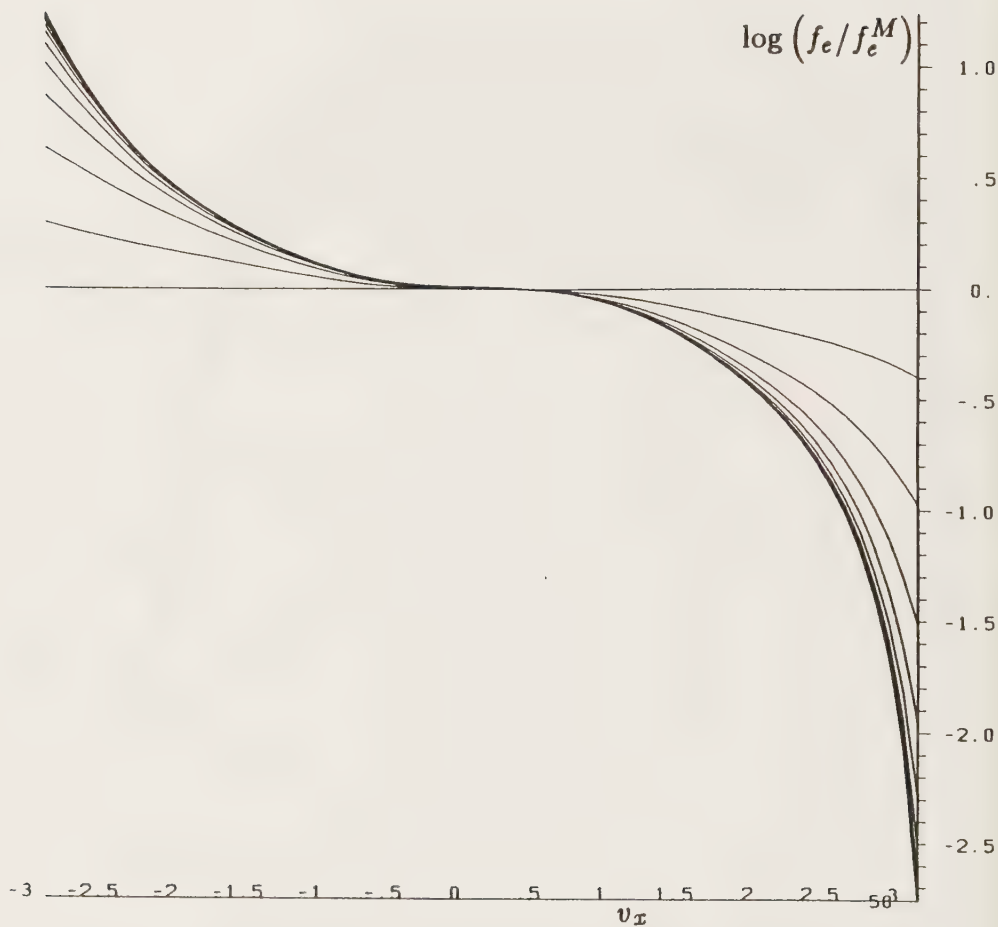


Fig. 7.1. $\log(f_e/f_e^M)$ gegen v_x zu verschiedenen äquidistanten Zeitpunkten

selbststoßbehaftet wird stationär

$\epsilon = 0.1$

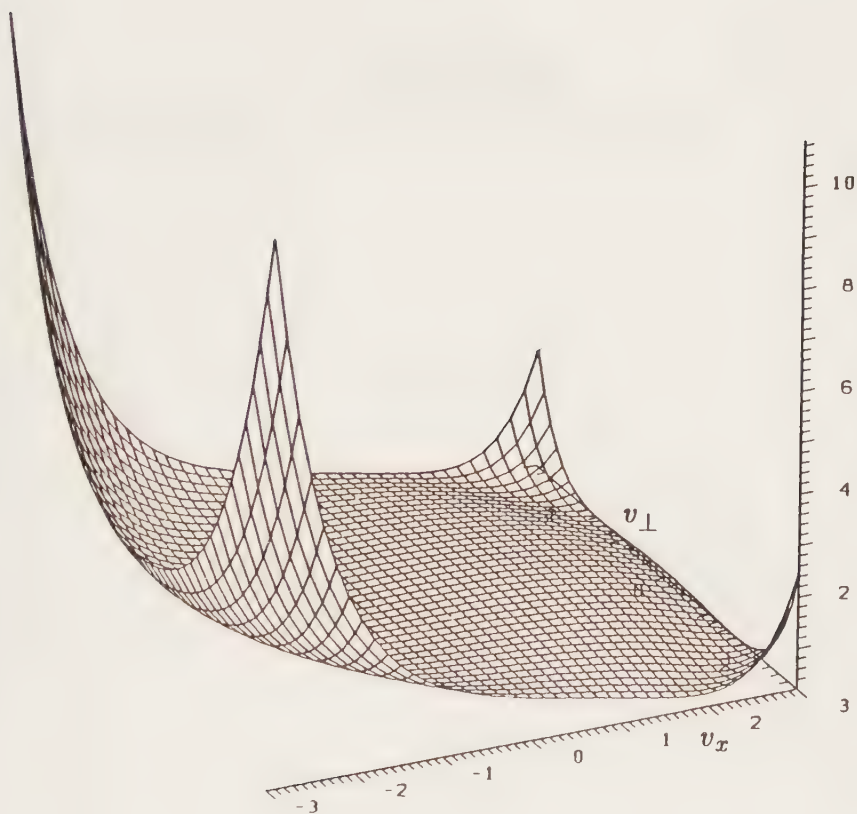


Fig. 7.2. f_e/f_e^M gegen $v_x, v_\perp$ im stationären Zustand

selbststoßbehaftet

$\epsilon = 0.1$

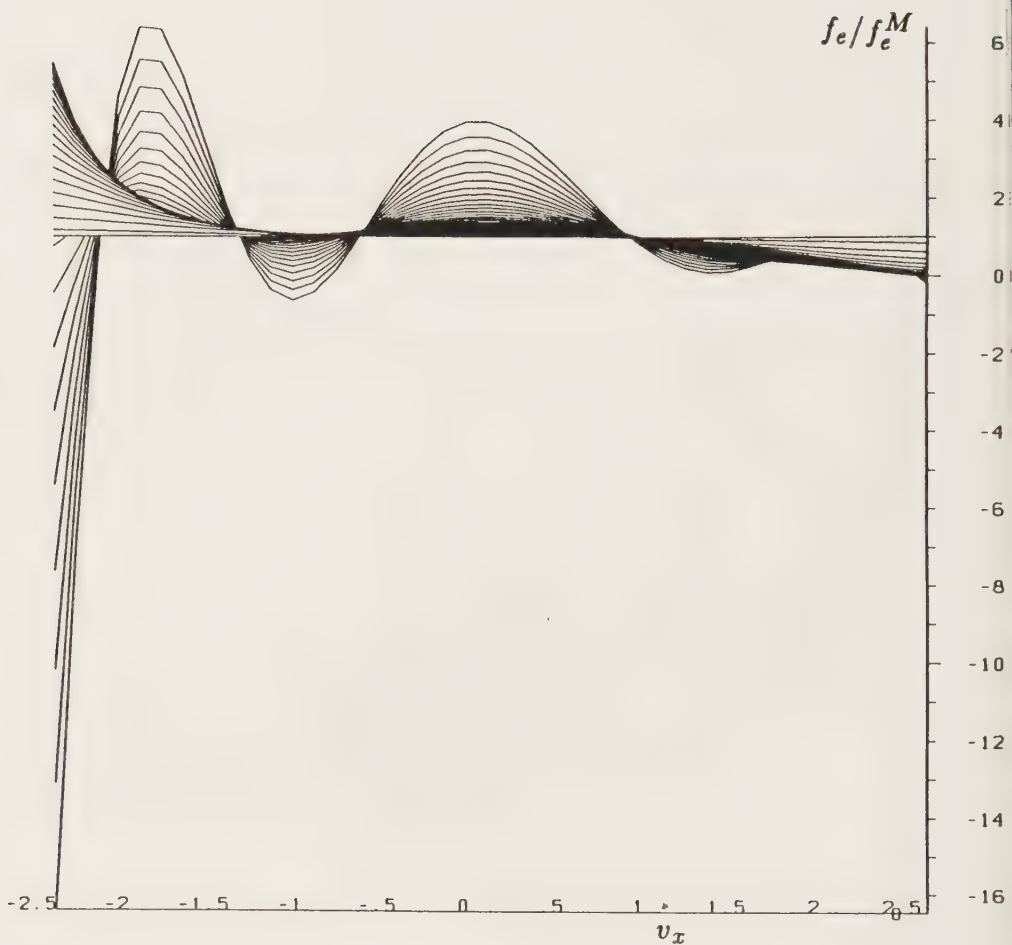


Fig. 7.9. f_e/f_e^M gegen v_x zu verschiedenen äquidistanten Zeitpunkten

selbststoß/rei, $n_{max} = 4$ wird nicht stationär

$\epsilon = 0.1$

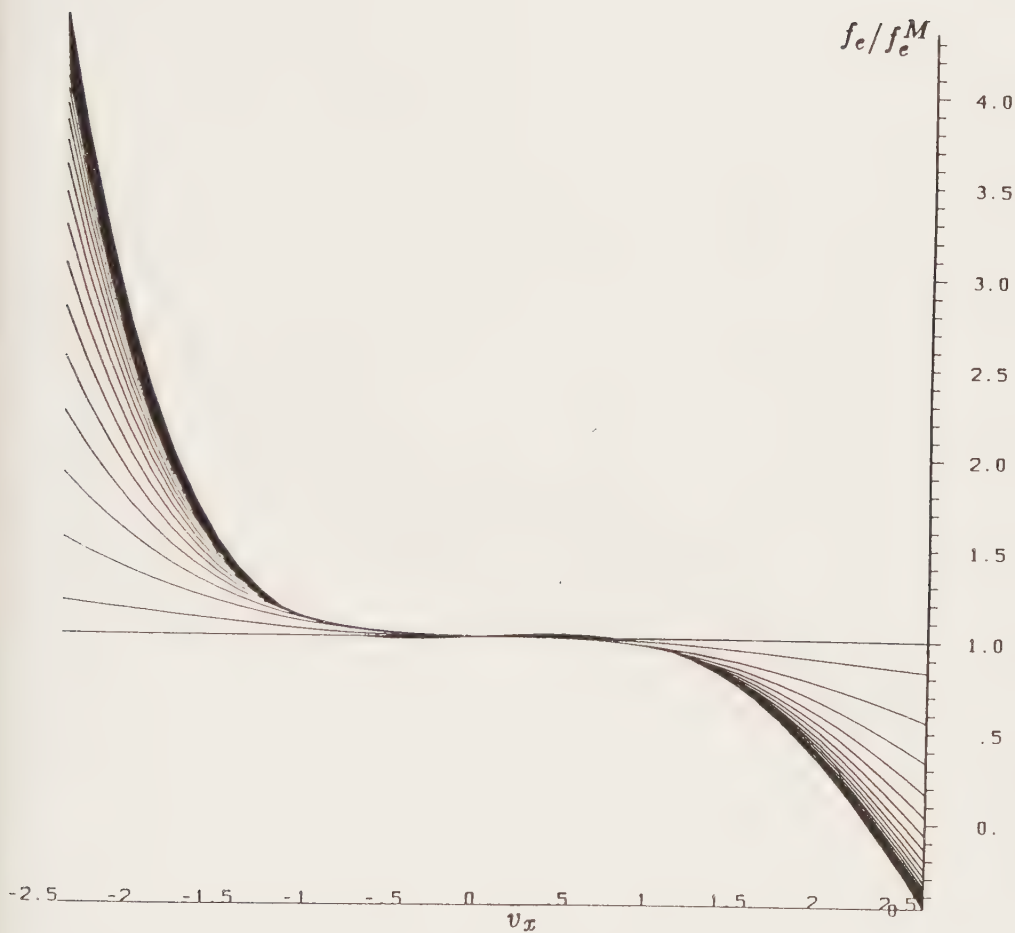


Fig. 7.4. f_e/f_e^M gegen v_x zu verschiedenen äquidistanten Zeitpunkten

selbststoßfrei, $n_{max} = 1$ wird stationär

$\epsilon = 0.1$

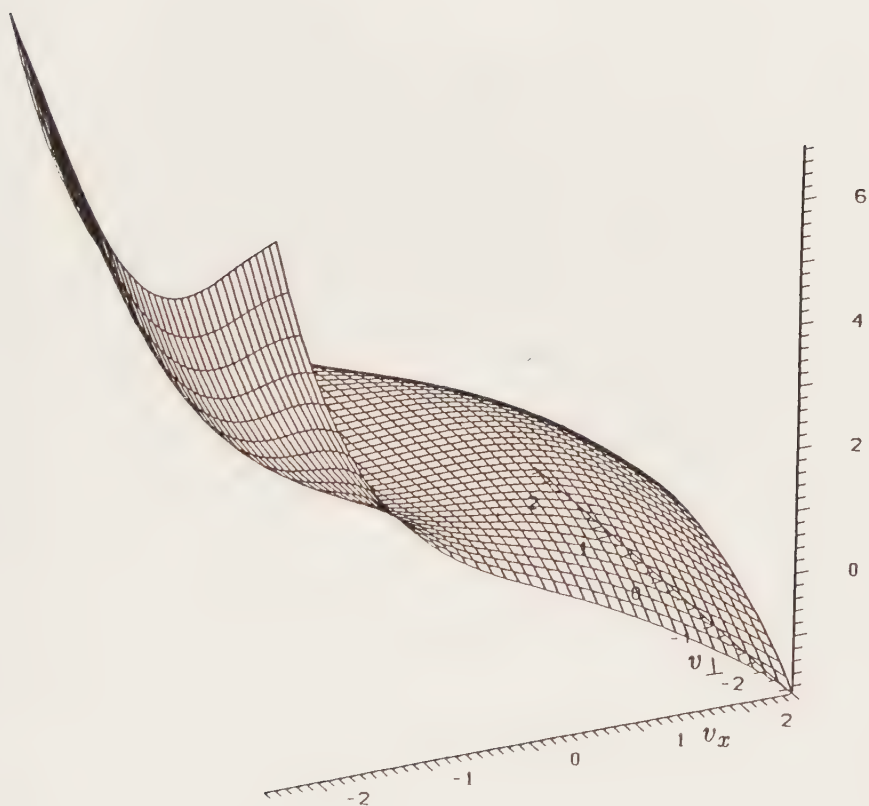


Fig. 7.5. f_e/f_e^M gegen $v_x, v_\perp$ im stationären Zustand

selbststoßfrei, $n_{max} = 1$

$\epsilon = 0.1$

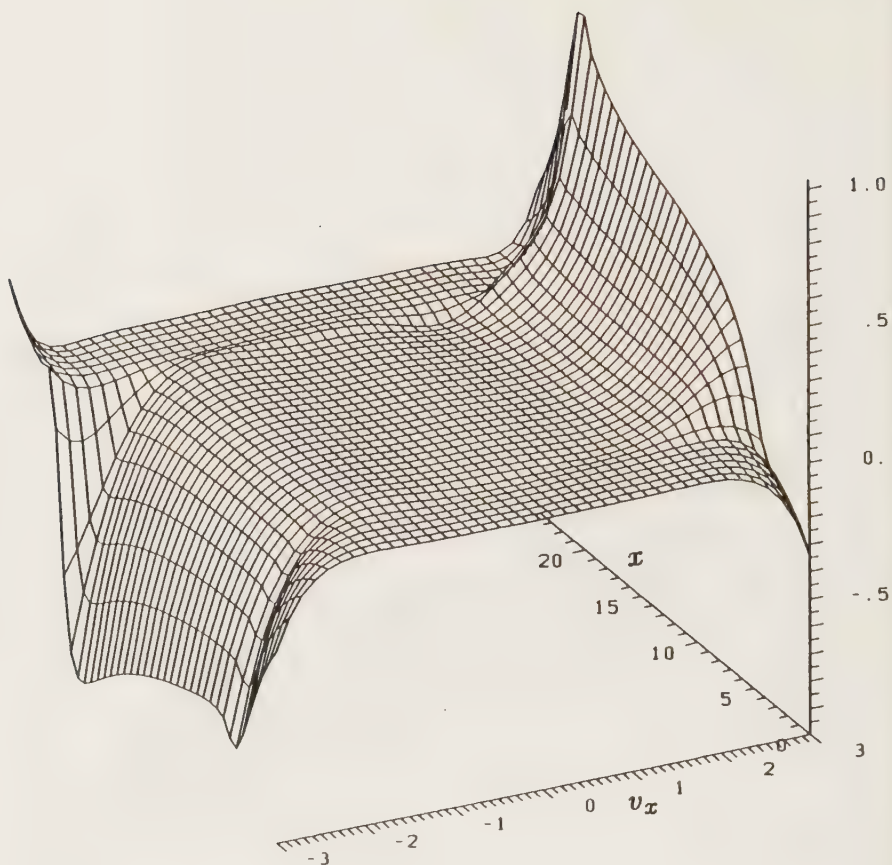


Fig. 7.6. $\log(f_e/f_e^M)$ gegen v_x, x im stationären Zustand

Dichte homogen

$$T_{l/r} = 2/1 \text{ über } 16\lambda, \quad J_e = 0$$

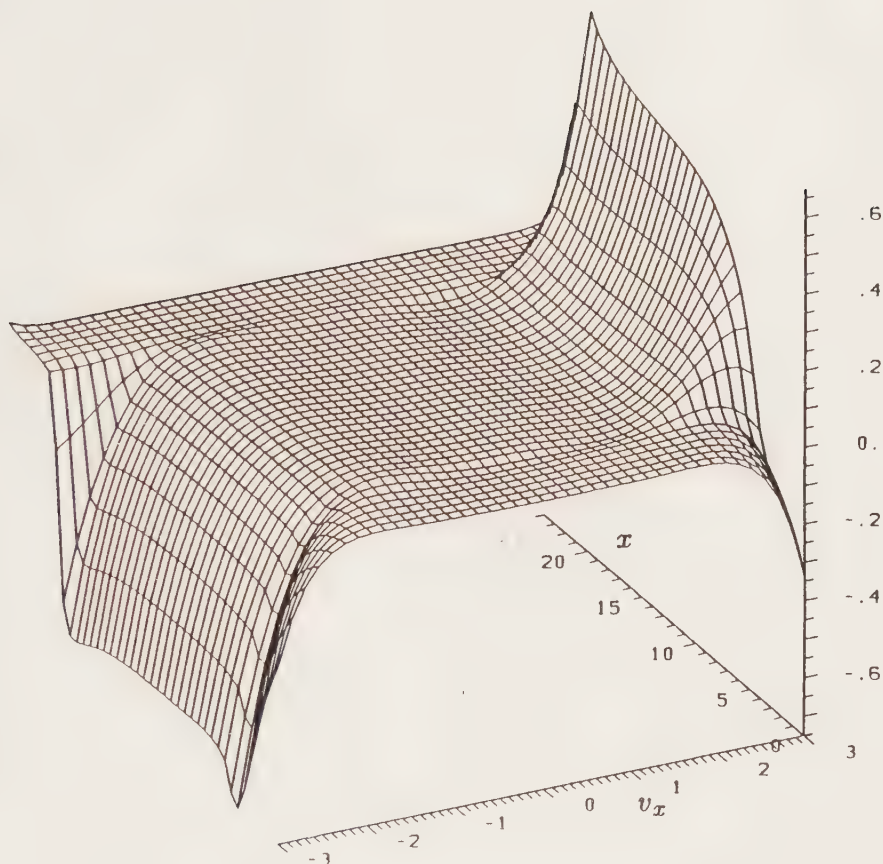


Fig. 7.7. $\log(f_e/f_e^M)$ gegen v_x, x im stationären Zustand

Druck homogen

$T_{l/r} = 2/1$ über 16λ , $J_e = 0$

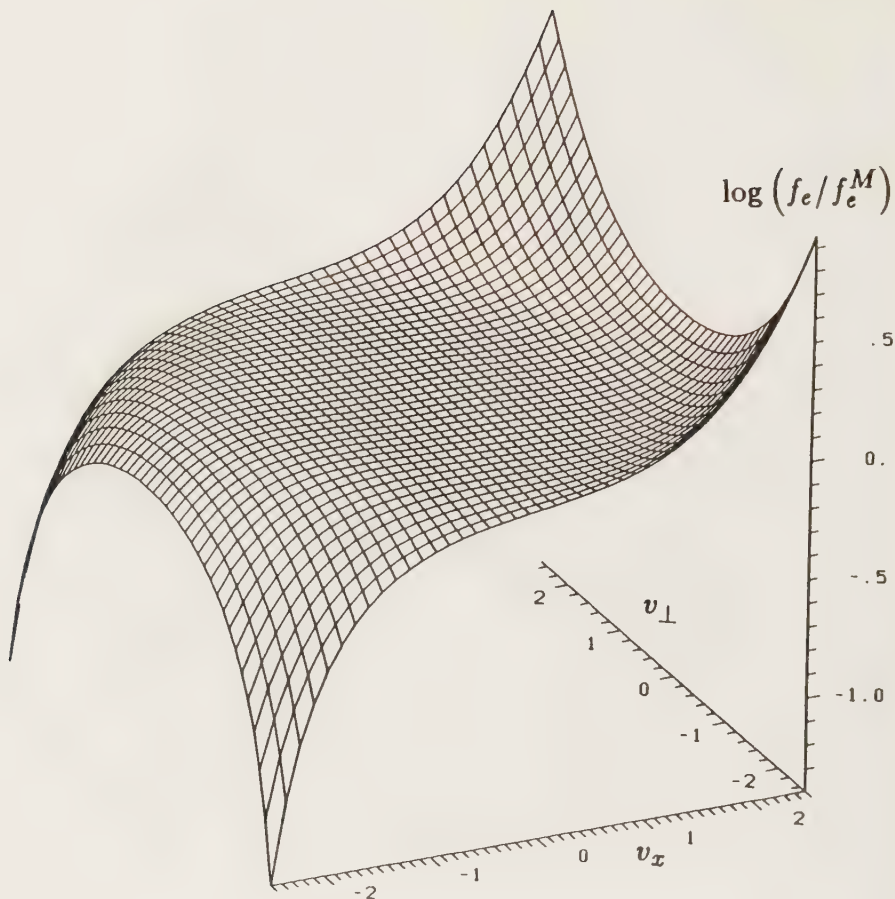


Fig. 7.8. $\log(f_e/f_e^M)$ gegen $v_x, v_{\perp}$ im stationären Zustand in der Systemmitte
Druck homogen

$\tau_{l/r} = 2/1$ über 16λ , $J_e = 0$

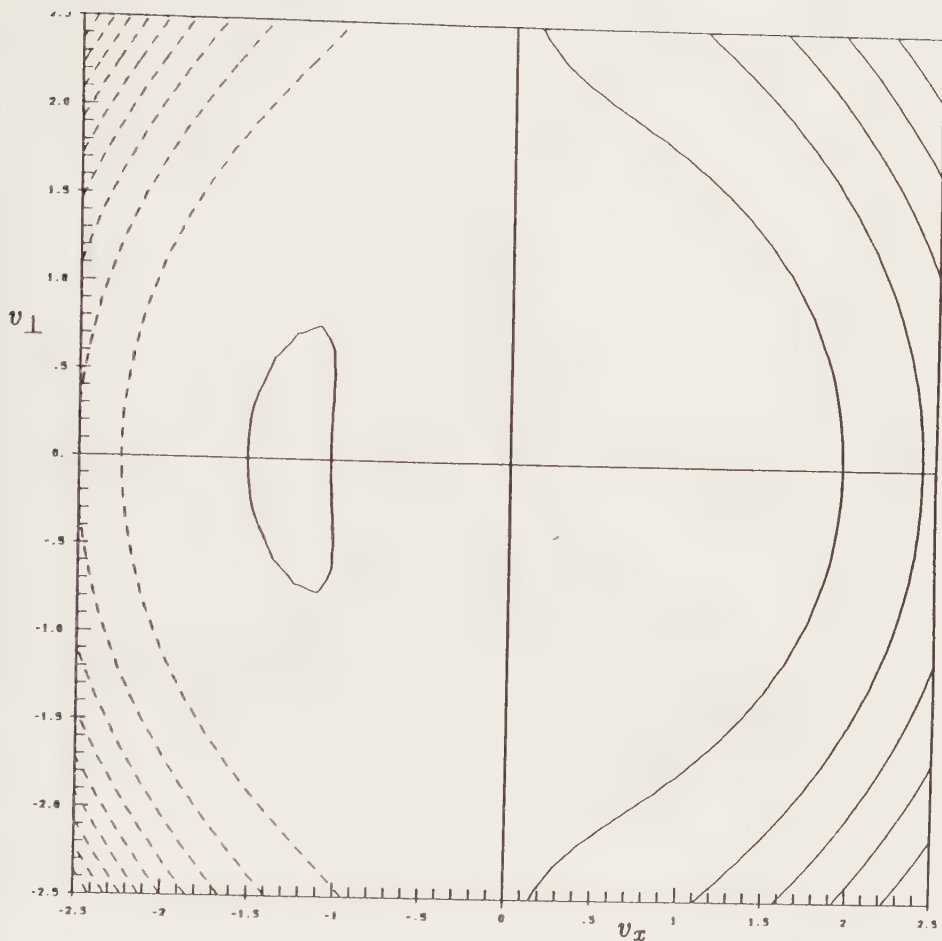


Fig. 7.9. Kontourplot von $\log(f_e/f_e^M)$ aus Fig. 7.8. in der $v_x - v_\perp$ -Ebene

durchgezogene Linien $\Leftrightarrow$ Höhenlinien zu *positiven* Funktionswerten

gestrichelte Linien $\Leftrightarrow$ Höhenlinien zu *negativen* Funktionswerten

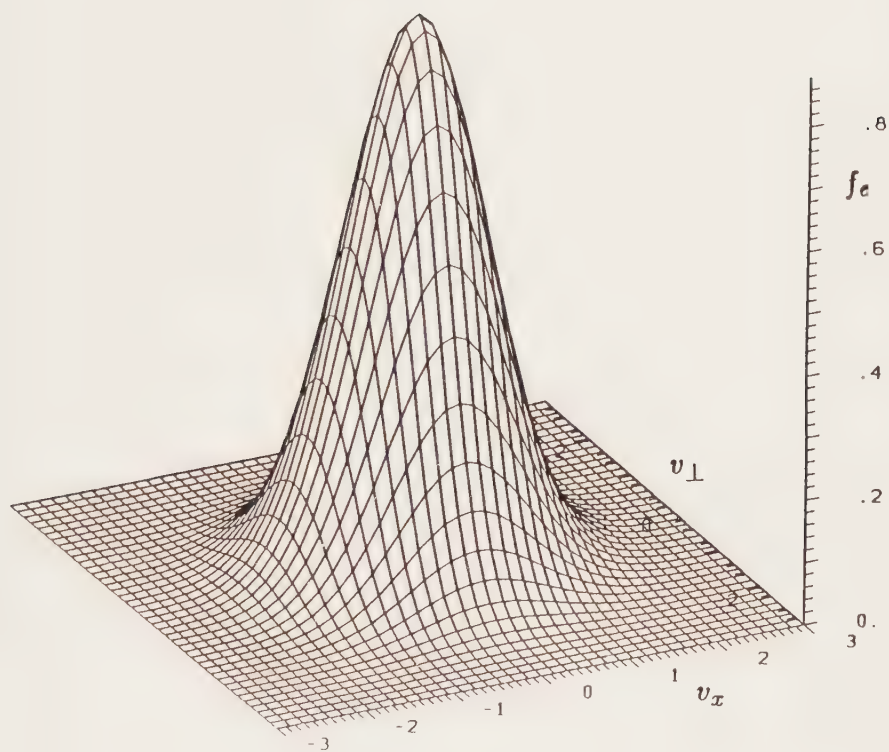


Fig. 7.10. f_e aus Fig. 7.8. direkt gegen $v_x, v_{\perp}$

"... denn ich glaube,
wenn jemand einer solchen Nacht,
in welcher er so fest geschlafen,
daß er nicht einmal einen Traum gehabt,
alle übrigen Tage und Nächte seines Lebens gegenüberstellen
und nach reiflicher Überlegung sagen sollte,
wieviel angenehmere und bessere Tage und Nächte als jene Nacht
er wohl in seinem Leben gehabt hat:
so, glaube ich, würde nicht nur ein gewöhnlicher Mensch,
sondern der Großkönig selbst finden,
daß diese sehr leicht zu zählen sind
gegen die übrigen Tage und Nächte."

Sokrates, Apologie, 40d.

DANKSAGUNG

Mein besonderer Dank gilt Prof. Lackner für seine hervorragende Betreuung mit zahlreichen Diskussionen, die wesentlich zum Gelingen beigetragen haben.

Prof. Lortz danke ich vielmals für die Übernahme des ersten Gutachtens.

Die Herren Drs. Chodura, Brambilla, Neuhauser und Schneider standen mir mit nützlichen Hinweisen zur Seite.

Fr.Hansen und Fr.Heilmair bin ich sehr verpflichtet für ihre ständige Hilfsbereitschaft. Mit ihren intimen *TeX*-Kenntnissen waren mir Fr.Hansen und Fr. O'shea oft eine große Hilfe.

Meine geschätzten Co-Doktoranden haben viel zu Spaß und guter Laune beigetragen, auch nach Feierabend.

Ganz herzlich danken möchte ich an dieser Stelle meinen lieben Eltern für ihr stets offenes Haus und Ohr und ihre vielfältige Unterstützung.

LEBENS LAUF

Ich wurde am 14. Juli 1958 in Giessen geboren als Sohn des Arztes Dr. Reiner Blobel und seiner Frau Renate, geborene Kegler. Ein paar Monate später zog die Familie nach Tübingen, wo ich von 1964 bis 1968 die Grundschule besuchte. Nach meinem ersten Halbjahr im Gymnasium zogen wir nach Schwäbisch Hall, wo ich 1977 Abitur machte. Im Wintersemester 1977/78 begann ich in München mit dem Studium der Physik. Das Vordiplom absolvierte ich im Frühjahr 1979, das Diplom im Herbst 1983. In meiner Diplomarbeit ging es um die mathematische Behandlung einer Fragestellung aus der statistischen Physik. Anschliessend arbeitete ich als wissenschaftliche Hilfskraft im Bereich der experimentellen Kernphysik (Schwer-Ionen) in Garching, bis ich im Frühjahr 1985 eine Doktorandenstelle am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik erhielt.

